

**MARIA DE FÁTIMA FERREIRA ALMEIDA**

**USO DA KRIGAGEM INDICATIVA NA SELEÇÃO DE ÁREAS PROPÍCIAS  
AO CULTIVO DE CAFÉ EM CONSORCIAÇÃO OU ROTAÇÃO COM  
OUTRAS CULTURAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS, BRASIL  
2013

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

A447u  
2013

Almeida, Maria de Fátima Ferreira, 1967-

Uso da Krigagem Indicativa na seleção de áreas propícias ao cultivo de café em consorciação ou rotação com outras culturas / Maria de Fátima Ferreira Almeida. – Viçosa, MG, 2013. xi, 141 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui anexos.

Orientador: Gérson Rodrigues dos Santos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 128-135.

1. Estatística agrícola. 2. Solos - Manejo. 3. Interpolação.  
4. Agricultura de precisão. 5. Café - Cultivo. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Estatística. Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria. II. Título.

CDD 22. ed. 519.5

MARIA DE FÁTIMA FERREIRA ALMEIDA

**USO DA KRIGAGEM INDICATIVA NA SELEÇÃO DE ÁREAS PROPÍCIAS  
AO CULTIVO DE CAFÉ EM CONSORCIAÇÃO OU ROTAÇÃO COM  
OUTRAS CULTURAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de fevereiro de 2013.

---

Fernando Luiz Pereira de Oliveira

---

Moysés Nascimento

---

Gérson Rodrigues dos Santos  
(Orientador)

“Nunca será tarde para buscar um mundo  
melhor e novo, se no empenho pusermos  
coragem e esperança.”

Alfred Tennyson

Aos meus pais Xisto Ferreira dos Santos e Percília Baia dos Santos, pelo carinho e amor incondicionais, esforços e pelos exemplos de bondade.

Aos meus irmãos Reinaldo Ferreira Duarte, Maria Inês Ferreira Barbosa, Marilda Ferreira dos Santos Borém e José Leandro Ferreira, pela paciência e cordialidade de não medir esforços em ajudar sempre que foram solicitados.

À minhas filhas Magaly Stefânia Almeida e Luma Fabiane Almeida, pelos momentos de desabafo, amor e compreensão nos momentos que precisavam de minha presença e estive ausente, saiba que vocês estiveram presentes em meu coração em todos os momentos.

Ao meu esposo Geraldo Aparecido Almeida por estar ao meu lado sempre, ainda que distante e por acreditar em mim quando eu mesma duvidava.

Vocês têm e terão sempre um lugar especial no meu coração independente de quaisquer situações ou circunstâncias.

Dedico.

## AGRADECIMENTOS

À Deus pelas oportunidades e pela força diária. Em especial, nesse momento.

À Universidade Federal de Viçosa, por intermédio do Programa de Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria, pela oportunidade de aprendizagem.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pelo apoio ao desenvolvimento deste projeto de pesquisa.

Ao professor Gérson Rodrigues dos Santos pelo apoio, paciência, sabedoria e aprendizado durante este tempo que trabalhamos juntos.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Viçosa que contribuíram para minha formação profissional, sobretudo os professores, Nerilson Terra Santos, Antônio Policarpo Souza Carneiro, José Ivo Ribeiro Junior, Carlos Henrique Osório Silva, Fabyano Fonseca e Silva, Luiz Alexandre Peternelli, e Gérson Rodrigues dos Santos.

Ao professor Domingos Sárvio Valente, do Departamento de Engenharia Agrícola da UFV que, gentilmente, nos cedeu os dados, ao professor Júlio do Departamento de Solos e ao Leonardo Silva que nos cederam informações precisas sobre as variáveis de solo utilizadas neste trabalho e ao professor Nerilson Terra Santos, do Departamento de Estatística, pelo apoio.

Aos colegas de mestrado do semestre 2011/1, 2011/2, 2012/1 e 2012/2 e ao Alex da Silva Santos, Karine e Wagner R. Pinheiro.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram, obrigada.

## SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS .....	vii
LISTA DE FIGURAS .....	viii
RESUMO .....	x
ABSTRACT .....	xi
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. REVISÃO DE LITERATURA .....	6
2.1 Modelagem Geoestatística de Variáveis Aleatórias .....	7
2.1.1 Teoria das variáveis regionalizadas .....	8
2.1.2 Função Aleatória (FA) .....	10
2.1.3 Função de Probabilidade e Função Indicadora .....	11
2.1.4 Hipóteses de Estacionariedade .....	13
2.2 Semivariograma .....	16
2.2.1 Semivariograma teórico .....	16
2.2.2 O Alcance prático ( $a$ ) e o alcance teórico ( $a_0$ ) .....	24
2.2.3 Efeito Pepita e pepita puro .....	28
2.3 Isotropia e anisotropia .....	30
2.3.1 Vetores e pontos .....	34
2.3.2 Fundamentos das transformações algébricas e analíticas utilizadas para a correção da anisotropia .....	41
2.3.3 Expansões e compressões .....	41
2.3.4 Rotação em torno da origem .....	43
2.3.5 Relação existente entre correção da anisotropia as transformações vetoriais e geométricas envolvidas .....	46
2.4 Forma quadrática positiva definida .....	49
2.4.1 Representação de autovalores e autovetores e sua relação com vetor de probabilidade .....	57
2.5 Multiplicador de Lagrange .....	59
2.5.1 Justificativa do método dos Multiplicadores de Lagrange .....	64
2.5.2 Gradiente .....	66
2.6 Krigagem .....	72
2.6.1 Sistema de Krigagem .....	73
2.6.2 Krigagem Ordinária .....	77
2.7 O preditor de Krigagem por Indicação ou Krigagem Indicativa .....	81
2.7.1 O estimador de Krigagem Indicativa para atributos numéricos .....	82
2.7.2 Vantagens e desvantagens da Krigagem Indicativa .....	83

2.7.3	O uso da Krigagem Indicativa na agricultura de precisão .....	85
2.8	ConSORCIAÇÃO de Culturas Anuais e Frutíferas com Culturas Perenes.....	86
2.8.1	Estudo das propriedades químicas do solo para o planejamento de manejo de consorciação de culturas.....	89
2.8.2	Classes de suficiência do solo quanto ao teor dos principais nutrientes para o cultivo de café no Estado de Minas Gerais.....	90
2.8.3	Classes de suficiência do solo quanto ao teor dos principais nutrientes, para o cultivo de bananeira no Estado de Minas Gerais.....	99
3.	MATERIAIS E MÉTODOS .....	102
3.1	Descrição do Experimento .....	102
3.2	Pontos de Corte por Variáveis e por Cultura.....	104
4.	RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	107
4.1	RESULTADOS.....	107
4.1.1	Resultados obtidos com a krigagem indicativa para o cultivo de café.....	107
4.1.2	Resultados obtidos com o uso da krigagem Indicativa para as variáveis de solos constantes na Tabela 3 (Seção 3.2) propícias ao cultivo de bananeira.....	114
4.2	DISCUSSÃO.....	120
4.2.1	Semivariogramas e Mapas de probabilidade de áreas para os nutrientes (p, k, ca, mg, pH, V, SAT/Al e Matéria Orgânica) e seus níveis de suficiência para o cultivo de café ....	120
4.2.2	Análise da eficiência do método de KI na modelagem de dados e apresentação de resposta a questão de pesquisa.....	125
5.	CONCLUSÃO .....	126
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	128
	ANEXOS.....	136

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Faixas de suficiência para MO no solo (0-20 cm) sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais (ALVES, 2012). .....	91
Tabela 2 - Faixas de suficiência para MO no solo (20-50 cm) de profundidade , sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.....	91
Tabela 3 - Faixas de suficiência para Ph no solo (0-20 cm) sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.....	92
Tabela 4 - Faixas de suficiência para K no solo (0-20 cm) de profundidade, sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais. ....	94
Tabela 5 - Faixas de suficiência para K no solo (20-50 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais.....	94
Tabela 6 - Faixas de suficiência para Ca no solo (0-20 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais (ALVES, 2012). .....	95
Tabela 7 - Faixas de suficiência para Ca no solo (20-50 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais (ALVES, 2012). .....	96
Tabela 8 - Faixas de suficiência para Mg no solo (0 - 20 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais(ALVES, 2012). .....	97
Tabela 9 - Faixas de suficiência para Mg no solo (20-50 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais(ALVES, 2012). .....	97
Tabela 10 - Faixas de suficiência para Al no solo (0-20 cm) de profundidade sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais. ....	98
Tabela 11 - Faixas de suficiência de Al no solo (20 – 50 cm) de profundidade sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais. ....	98
Tabela 12 - Faixas de suficiência de Saturação por Base(V) no solo (0-20 cm) de profundidade sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.....	99
Tabela 13 - Faixas de suficiência de Saturação por Base (V) no solo (20-50 cm) de profundidade sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.....	99
Tabela 14 - Variáveis altimétrica e de solo a uma profundidade de (0 - 20 cm) e os respectivos pontos de corte definido para o cultivo de café em MG.....	105
Tabela 15 - Variáveis de solo a uma profundidade de (20 - 50 cm) e os respectivos pontos de corte definido para o cultivo de café em MG. ....	105
Tabela 16 - Variáveis de altitude e de solo e respectivos pontos de corte definidos para o cultivo de bananeira em Minas Gerais (EMBRAPA-Mandioca e Frutíferas, 2004).....	106

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo de semivariograma com os parâmetros $C_0$ , $C_1$ , $C$ e $a$ .....	17
Figura 2 - modelo de semivariograma representando a reta tangente ( $r$ ), que determina a proporção do alcance prático.....	18
Figura 3 - Modelo Teórico de Semivariograma Exponencial .....	21
Figura 4 - Modelo de Semivariograma Gaussiano. ....	22
Figura 5 - Efeito Pepita e Pepita Puro. ....	29
Figura 6 - Semivariogramas anisotrópicos com as anisotropias Geométrica(a), Zonal(b) e Combinada (c). ....	33
Figura 7 - Tipos de gráficos representativos da Anisotropia Geométrica. (a) Semivariograma anisotrópico nas direções de $17^\circ$ e $107^\circ$ , (b) Semivariograma para as direções de $17^\circ$ e $107^\circ$ utilizando a elipse da rosa dos ventos. (c) Semivariograma de modelo sem patama para mais de uma direção em que $w_1, w_2, w_3$ representam as inclinações nas direções 1, 2 e 3. ....	34
Figura 8 - Plano cartesiano .....	35
Figura 9 - Representação de um vetor (a) Vetor força aplicado em um ângulo, e (b) representação por meio de flechas de mesmo comprimento, direção e sentido.....	35
Figura 10 - Representação do sentido de um vetor, (a) por meio de segmentos orientados de mesmo sentido e (b) segmentos orientados de sentido contrário. ....	37
Figura 11 - Segmento orientado que define o sentido de um vetor. (a) Segmentos orientados (A,B), e (C,D) de mesmo sentido e (b) Segmentos orientados (A',B') e (C',D') de sentido contrário.....	37
Figura 12 - Segmentos de reta orientados. ....	38
Figura 13 - Segmentos de reta orientados a partir da origem.....	38
Figura 14 - Representação gráfica em que T leva vetores em vetores (a) e ponto em ponto (b). ....	40
Figura 15 - Representação gráfica do quadrado unitário (a), compressão (b) e da expansão (c), com k igual a um, $\frac{1}{2}$ e 2, respectivamente.....	42
Figura 16 - Representação gráfica do exemplo com os pontos O (1, 2) e P(0, 3) fazendo a transformação por compressão para $k=1/2$ .....	43
Figura 17 - Representação gráfica para o exemplo com os pontos A(1,2) e B(0,3) fazendo a transformação por compressão para $k = 1/2$ .....	44
Figura 18 - Gráfico representativo das retas tangentes definidas por $C_{(0)} = 0$ e $C_{(a_0)} = \gamma$ que definem o ângulo de anisotropia geométrica. ....	46
Figura 19 - Gráfico representativo dos eixos e ângulos de anisotropia.....	47
Figura 20 - Efeito da multiplicação por M. ....	58
Figura 21 - Extremos com restrições e sem restrições. ....	61

Figura 22 - Curvas de nível e a curva de restrição. ....	64
Figura 23 - Derivada direcional definida por um ponto $P(x,y)$ e um vetor unitário $U$ .....	67
Figura 24 - Derivadas direcionais e reta tangente a curva $C$ . ....	68
Figura 25 - Isolinhas isotérmicas.....	71
Figura 26 - Gradientes representados por vetores ortogonais as isolinhas isotérmicas.....	72
Figura 27- Mapa da área com as coordenadas geográficas e representação dos pontos amostrados. ....	103

## RESUMO

ALMEIDA, Maria de Fátima Ferreira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2013. **Uso da Krigagem Indicativa na seleção de áreas propícias ao cultivo de café em consorciação ou rotação com outras culturas.** Orientador: Gérson Rodrigues dos Santos. Coorientadores: Nerilson Terra Santos e Antônio Policarpo Souza Carneiro.

A Geoestatística se destaca, principalmente por ser uma ciência interdisciplinar que permite uma troca de informações entre geólogos, engenheiros de petróleo, matemáticos, estatísticos e demais categorias profissionais possibilitando assim uma melhor interpretação da realidade geológica e ambiental. Dentre as técnicas de Krigagem destaca-se a Krigagem Ordinária e a Krigagem Indicativa. Em que a primeira é um preditor de Krigagem linear pontual que considera a média desconhecida e incorpora em sua formulação o procedimento de uma média ponderada móvel, porém o que a diferencia é o fato de que os pesos são obtidos levando em consideração a continuidade representada pelo semivariograma. A Krigagem Indicativa é um preditor que utiliza-se da técnica de Krigagem Ordinária ou de Krigagem Simples dos dados transformados por meio de uma função não linear binária composta por 0 e 1. Uma das grandes vantagens da Krigagem Indicativa reside no fato de ser um estimador não paramétrico que permite transformar variáveis qualitativas (presença ou ausência) ou variáveis quantitativas (de acordo com um ponto de corte de interesse) e estimar probabilidade de ocorrência da variável. Na agricultura, o seu uso permite fazer planejamento de correção do solo de forma localizada e identificar zonas de manejo para rotação ou consorciação de culturas. Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo teórico-aplicado das vantagens e desvantagens no uso da Krigagem Indicativa para o planejamento de correção do solo para implantação da técnica de consorciação de cultivo de bananeira com o cultivo de café, utilizando dados de propriedades químicas do solo por meio de amostras coletadas em uma fazenda cultivada com café no Município de Araponga- Zona da Mata Mineira.

## ABSTRACT

ALMEIDA, Maria de Fátima Ferreira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2013. **Use of Kriging Indicative in selecting areas for the cultivation of coffee in intercropping or rotation with other crops.** *Adviser:* Gerson Rodrigues dos Santos. *Co-Advisers:* Nerilson Terra Santos and Antônio Policarpo Souza Carneiro.

Geostatistics stands out, mainly because it is an interdisciplinary science that allows an exchange of information between geologists, petroleum engineers, mathematicians, statisticians and other professional groups thus enabling better interpretation of geological and environmental reality. Among the highlights Kriging techniques to Ordinary Kriging and Kriging Indicative. Where the first is a linear kriging predictor of timely considering the average unknown and incorporates in its formulation the procedure a weighted mobile, but what sets it apart is the fact that the weights are obtained taking into account the continuity represented by the semivariograma. The Indicative Kriging predictor is one that uses the technique of ordinary kriging or simple kriging of the data processed through a nonlinear function composed of binary 0 and 1. One of the great advantages of Kriging Indicative is the fact of being a nonparametric estimator that allows transform qualitative variables (presence or absence) or quantitative variables (according to a cutoff point of interest) and to estimate ranges of probability of occurrence of the variable. In agriculture, its use allows planning of soil correction of localized and identify management zones for rotation or intercropping. This paper aims to present a theoretical and practical study of the advantages and disadvantages of using the Kriging Indicative planning soil remediation technique for implantation of intercropping with banana cultivation of coffee, using data from soil chemical properties through samples collected at a farm cultivated with coffee in the city of Araponga - Zona da Mata Mineira.

# 1. INTRODUÇÃO

Coube ao engenheiro de minas D.G. Krige e ao estatístico H.S. Sichel o desenvolvimento de novos métodos de estimação para reservas minerais espalhadas. De 1957 a 1962 o engenheiro francês G. Matheron, de posse das observações de D.G. Krige, desenvolveu a Teoria das variáveis regionalizadas, que são representadas na prática, por certa quantidade de dados numéricos brutos e georreferenciados disponíveis, a partir dos quais são obtidas as informações sobre as características do fenômeno (LANDIM, 2006; VIEIRA, 2000).

Até 1968 a Geoestatística foi utilizada para estimativas de reservas de hidrocarbonetos e entre 1968 a 1970 foi desenvolvida a Teoria da Krigagem Universal (nome dado por Matheron em homenagem a D.G. Krige), para aplicação à cartografia submarina com tendência sistemática (VIEIRA, 2000). A partir disto, muito tem se desenvolvido na Geoestatística se destacando com ampla utilização no campo das Ciências Agrárias e Geologia aplicada à agricultura de precisão e à preservação ambiental (LAMPARELLI; ROCHA; BORGHI, 2001) dentre outros setores. Aplicações da Geoestatística podem ser encontradas em Landim (2006), Mendes, Bassoi e Silva (2012), Silva et al. (2011), Souza et al. (2008), Machado et al. (2007), Valente et al. (2012), Valeriano (2001, 2002, 2004, 2007, 2008), dentre outros.

Segundo Valeriano (2008), a Krigagem, uma técnica Geoestatística, é o método de interpolação que melhor expressa as formas do relevo. Esse método permite a interpolação de valores de variáveis não amostradas a partir dos vizinhos amostrados. A cota de um ponto de interesse é calculada pela média ponderada das amostras vizinhas, determinada por meio de análise geoestatística, a qual fornecerá os coeficientes que descrevem, por meio da função semivariograma, a variabilidade espacial dos dados analisados.

Dentre as técnicas de Krigagem destaca-se a Krigagem Ordinária e a Krigagem Indicativa, em que a primeira é um preditor de Krigagem linear pontual que considera a média desconhecida e cuja fórmula de fazer previsões segue procedimentos similares ao cálculo de uma média ponderada móvel, porém o que a diferencia é o fato de que os pesos são obtidos levando em consideração a continuidade espacial contida no semivariograma. A segunda é um preditor de Krigagem que utiliza a técnica de Krigagem Ordinária ou de Krigagem Simples

(assunto que não será tratado neste trabalho) dos dados transformados por meio de uma função não linear binária composta por 0 e 1, chamada Krigagem Indicativa ou Krigagem dos Indicadores.

De acordo com Felgueiras (2001) uma das grandes vantagens da Krigagem Indicativa reside no fato de ser um estimador não paramétrico que permite transformar variáveis qualitativas (presença ou ausência) ou variáveis quantitativas (de acordo com um ponto de corte de interesse) e estimar de probabilidade de ocorrência da variável.

De acordo com Vieira (2000), Guimarães (2004) e Rocha (2005) a Geoestatística se destaca principalmente por ser uma ciência interdisciplinar que permite uma troca de informações entre geólogos, engenheiros de petróleo, matemáticos, estatísticos e demais categorias profissionais possibilitando assim uma melhor interpretação da realidade geológica e ambiental. Esta troca de informações promove o enriquecimento metodológico da Geoestatística, permitindo atingir seu objetivo primordial que é melhorar as previsões por meio de modelos mais realistas da heterogeneidade do fenômeno analisado.

A técnica de previsão por Krigagem, técnica utilizada pela Geoestatística, leva em consideração a continuidade espacial representada no semivariograma (função que mede o grau de semelhança entre amostras vizinhas, cujos valores são relacionados com a posição espacial da amostra), ou seja, as técnicas de Krigagem utiliza-se da função semivariograma para fazer as previsões dos pontos não amostrados, baseando-se dos valores e na localização dos pontos amostrados.

A Geoestatística, através da técnica de Krigagem Indicativa pode ser utilizada na agricultura de precisão para fazer planejamento de correção do solo ou outros manejos de forma localizada. Diversas aplicações do método de Krigagem Indicativa na agricultura podem ser encontradas em Fagioli, Zimback e Landim (2012), Imai et al. (2003); Vicente et al. (2003), dentre outros.

A importância da Krigagem Indicativa está no fato de permitir gerar mapas de solo e com isso permitir a aplicação de técnicas de manejo apropriadas para cada local da área analisada viabilizando o uso do conceito de agricultura de precisão que de acordo com Tschiedel e Ferreira (2002), a introdução do conceito de agricultura de precisão é imprescindível em

propriedades onde se tenha como objetivo maximizar os lucros e minimizar os danos ambientais.

A exemplo da maximização dos lucros com redução dos danos ambientais a consorciação de culturas é uma alternativa porque é a combinação de plantas que tem tempos de vida e atingem alturas diferentes e que convivem na mesma área, aproveitando de maneira ótima a luz do sol. Essa ideia de combinar duas ou mais culturas visa maximizar a utilização da área. Além disso, a diversificação é uma vantagem pois quando o preço de um produto vai mal, um outro pode estar em alta. Isso proporciona maior equilíbrio para a economia (BRASIL, 2007).

O sistema consorciado vem se tornando uma tecnologia muito utilizada na produção de hortaliças. Dados de pesquisas recentes apontam que os sistemas consorciados favorecem o manejo fitotécnico das culturas associadas, ocasionando na maioria das vezes, aumento de produção por unidade de área e maior lucratividade para os olericultores (MONTEZANO, PEIL, 2006).

No Brasil estão sendo utilizadas muitas espécies de plantas para arborização de cafezais, tais como, podem ser citadas a seringueira (MATIELLO, ALMEIDA, 1991), a grevílea (BAGGIO et al., 1997), e cajueiro (MATIELLO et al., 1989). Porém além destas, as frutíferas com grande valor de mercado e boas características para a arborização, como o coqueiro anão, a pupunha e bananeira, podem ser boas opções (CARAMORI, MANETTI FILHO, 1993).

Segundo José et al. (2007) Observações microclimáticas em cultivos arborizados de café já foram realizadas em diferentes regiões e situações de cultivo, como em sistemas agro florestais (BARRADAS, FANJUL, 1986; VAAST et al., 2004), arborização com grevílea (MIGUEL et al., 1995) e consorciação com coqueiro-anão verde (PEZZOPANE et al., 2007). Esses trabalhos evidenciam que a variabilidade temporal e espacial da temperatura e umidade do ar em um sistema consorciado e suas diferenças em relação a um cultivo a pleno sol, vão depender do tipo de copa da árvore utilizada e da densidade do sombreamento (JOSÉ et al., 2007).

A consorciação como sombreamento provisório tem a função de proteção do cafeeiro na sua fase inicial de crescimento, sendo indicadas espécies anuais ou perenes de pequeno e

médio porte como a cultura da banana, plantando-se no espaçamento variando de 6×6 m até 10×10 m. A consorciação como sombreamento permanente geralmente estabelecida concomitante a eliminação do sombreamento provisório, tem a utilização de espécies perenes de grande porte como oleaginosas, madeiras e frutíferas, plantando-se no espaçamento variando de 10×10 m até 15×15 m.

Conforme as espécies consorciadas e os espaçamentos adotados, este sombreamento pode ser benéfico ao desenvolvimento vegetativo e produtivo do café com redução da bialidade de produção e também a melhoria da qualidade do produto com obtenção de bebida suave (FERNANDES, 1986).

Diversas espécies perenes são utilizadas na consorciação com a cultura do café, como espécies florestais (pinus, freijó, teca e bandarria), frutíferas (mamão, banana, coqueiro e macadâmia) e industriais (seringueira, cacau, pupunha e castanha). Podem ainda ser consorciadas com o café as culturas da mamona e do abacate, devendo-se fazer com que o nível de sombreamento não ultrapasse o índice de 40% relativo a área do café (MATIELLO, 1991).

A consorciação de frutíferas como a bananeira com o café é indicada por fazer a reposição da matéria orgânica e outros nutrientes do solo porque devolve ao solo um percentual elevado de massa verde e seca. A bananeira, embora, necessita de uma grande quantidade de nutrientes para sua produtividade, grande parte destes nutrientes é retornada ao solo e com isso, aproximadamente 66% da massa vegetativa são devolvidas ao solo após colheita do fruto (EMBRAPA, 2004).

As práticas de cultivo visando a produção agrícola sustentável devem minimizar as limitações do solo e do clima, assegurando rendimentos crescentes, além de conservar os recursos naturais e proteger o meio ambiente (MORRISON, CHICHESTER, 1994). Deste modo, o uso da terra em manejo de consorciação com culturas de frutíferas como a bananeira é indicado por gerar renda e fazer a reposição de matéria orgânica do solo degradado por cultura perene, como é o caso do café.

Neste trabalho priorizou a aplicação de Krigagem Indicativa por permitir apresentar mapas probabilísticos de subáreas dentro da área estudada e favorecer o planejamento

localizado de manejo de consorciação da frutífera bananeira para uma área já cultivada com o café por considerar a grande importância econômica e ambiental do manejo.

Considerando que os preditores geoestatísticos tem a garantia de ser BLUP, *Best Linear unbiased predictor* (Melhor Preditor Linear Não Viciado) e de predizer o erro nas estimativas, objetiva-se com este trabalho apresentar, através das Krigagens Ordinária e Indicativa, um planejamento da consorciação do café com a frutífera bananeira, visando elaborar mapas temáticos que apontam regiões com probabilidades do manejo dessas culturas baseando-se nos principais macronutrientes e micronutrientes do solo. Este objetivo e os passos para sua execução será melhor expresso através das ações que serão executadas, a saber:

- Fazer um estudo teórico acerca das estruturas matemáticas que efetivam as condições de otimalidade das Krigagens: Ordinária e Indicativa;
- Definir os pontos de corte para as variáveis de solo (macro e micro nutrientes) de acordo com Alves (2012) para o cultivo de café, e de acordo com EMBRAPA (2004) para o cultivo de bananeira.
- Fazer a transformação dos dados de acordo com os pontos de corte das variáveis para o café e para a bananeira.
- Ajustar os Semivariogramas para cada variável de acordo com o ponto de corte para cada macronutriente por cultura;
- Aplicar o método de Krigagem Ordinária nos dados originais e nos dados transformados;
- Fazer um estudo dos mapas de krigagem Indicativa, individualmente e por agrupamentos de macronutrientes, para verificar áreas com carência destes nutrientes e áreas mais favoráveis ao manejo de consorciação das duas culturas;
- Discutir as vantagens e desvantagens apresentadas na aplicação do método de Krigagem Indicativa nos planejamentos agrícolas;
- Sugerir, (caso seja viável), o método de Krigagem Indicativa para o planejamento agrícola de consorciação de culturas.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

De acordo com Vieira (2000) assim como a Estatística Clássica se baseia nas pressuposições de independência entre as amostras e distribuições idênticas para cada elemento amostral, na Geoestatística é preciso verificar também, algumas hipóteses básicas chamadas de hipóteses de Estacionariedade (assuntos que serão discutidos posteriormente) necessárias para sua aplicação.

Uma característica importante na Geoestatística que a diferencia das demais técnicas estatísticas é a escassez de possibilidades de repetição. Tal condição é justificada pelo fato de cada unidade amostral representar uma variável aleatória observada uma única vez. Deste modo, cada ponto representa uma amostra (VIEIRA, 2000).

Para exemplificar, considere-se um campo de área  $S$ , para o qual se tem um conjunto de valores medidos  $z(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , em que  $x_i$  identifica a posição no campo; e  $z$ , representa o valor da variável medida para cada par de coordenadas  $(x,y)$  em  $x_i$ . De acordo com Vieira (2000) o ponto de referência para o sistema de coordenadas  $(x,y)$  é arbitrário e fixado a critério do interessado. Para dada posição fixa  $x_i$ , cada valor medido da variável em estudo  $z(x_i)$ , pode ser considerado uma realização do conjunto de variável aleatória,  $Z(x)$ . A variável regionalizada  $z(x_i)$ , para qualquer  $x_i$  dentro da área  $S$ , por sua vez, pode ser considerada uma realização do conjunto de variáveis aleatórias,  $Z(x)$ , para qualquer  $x_i$ , dentro de  $S$ . Esse conjunto de variáveis aleatórias é denominado função aleatória ( $Z(x)$ ). Estas definições estão descritas em Journel e Huijbregts (1978) citado por Vieira (2000).

Vieira (2000) afirma que as definições apresentadas tornam-se necessárias porque uma função aleatória por ser contínua, pode ser submetida a uma gama de hipóteses sem as quais a dedução é impossível. Em outras palavras, estas hipóteses são necessárias porque não se podem conhecer os valores em todos os pontos, apenas aqueles obtidos por amostragem. Desse modo, a Geoestatística para predizer valores para locais não amostrados utiliza-se da estrutura de dependência espacial representada no semivariograma para fazer predições de valores para os locais não amostrados por meio da técnica de Krigagem (ANDRIOTTI, 2003).

Ao extrair dos dados disponíveis (amostras) uma imagem da variabilidade e a correlação existente entre estes valores, tomados em dois pontos do espaço, determina-se uma análise estrutural e por meio dela estima-se através do semivariograma a dependência entre as amostras.

Tal como em outras estatísticas que usam covariância e correlação para identificar continuidade, neste caso, pode-se citar como exemplo a análise de correlações canônicas (maiores informações sobre este tema e exemplos de aplicação pode ser encontradas em LAMDIM, 2011), a Geoestatística usa as estruturas de covariâncias, por meio do semivariograma e suas pressuposições.

## 2.1 Modelagem Geoestatística de Variáveis Aleatórias

De acordo com Webster e Oliver (2007) e Cressie (1993) citados por Santos (2010) entende-se uma variável aleatória como constituída pelos componentes:

$$Z(x) = \mu(x) + \varepsilon'(x) + \varepsilon''$$

Essa definição de variável aleatória de um processo estocástico com indexação em  $x$  atende a duas funções:

- i) Apresenta os três tipos de variação espacial sendo: uma variação determinística representada por  $\mu(x)$ , uma variação probabilística regionalizada representada por  $\varepsilon'(x)$  que define a dependência espacial estocástica presentes na vizinhança de  $x$ , e uma terceira componente, a variação probabilística completamente independente espacialmente (ou seja, não regionalizada, sem dependência espacial determinística ou probabilística),  $\varepsilon''$ .

Sem perda de generalidade, podemos fazer  $E[\varepsilon''] = 0$ , se a variável aleatória for contínua, pois se espera que seja um “ruído branco” normal, isto é,

$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ , porém a exigência de normalidade dos dados não é condição necessária para a Geoestatística.

- ii) Permitir um tratamento matemático e estatístico mais claro para o fenômeno pelo processo estocástico fundamental.

Observa-se pela equação  $E[Z(x)] = \mu(x), \forall x \in D$  (onde  $D$  é o domínio), em que se exige ou pressupõe implicitamente a existência de  $E\{Z(x)\}, \forall x \in D$ , isto é, o processo é estocástico de 1ª ordem.

Santos (2010) explica que isto pode ser justificado pelo fato de que outros processos que não possuem média (Distribuição de Cauchy) não ocorrem na realidade da Geoestatística, e caso estes ocorram a solução pode estar na análise que utiliza apenas distribuição de probabilidade e não envolvem momentos estatísticos. Como toda a teoria da Geoestatística está fundamentada nas variáveis regionalizadas, torna-se imprescindível fazer uma breve apresentação do tema.

### 2.1.1 Teoria das variáveis regionalizadas

A preocupação de pesquisadores com a variabilidade espacial remonta de muito tempo, Smith (1910) em experimentos de rendimento de variedades de milho, buscava eliminar efeito de variações no solo, Montgomery (1913), experimentou 224 parcelas onde mediu o rendimento de grãos, preocupado com o efeito do nitrogênio no trigo (VIEIRA, 2000). Waynick e Sharp (1919) citado por Vieira (2000) estudaram o nitrogênio total e o carbono no solo, todos com grande quantidade de amostras. Estes autores, dentre outros, utilizaram os mais variados esquemas de amostragem com a intenção de conhecer a variabilidade.

Porém, tais estudos não tiveram continuidade no tempo, devido em grande parte, a adoção de técnicas de casualização e replicação e ao conhecimento sobre funções de distribuição que levaram a adoção de amostragem ao acaso, desprezando assim, suas

localizações geográficas. A prática da casualização e repetição, somado ao uso da distribuição normal de frequência, é usado até hoje para assumir independência entre as amostras e garantir validade do uso da média e do desvio padrão em representar um fenômeno (VIEIRA, 2000).

O autor salienta que a distribuição normal não garante a independência entre as amostras, a qual pode ser verificada pela “autocorrelação”. A principal razão para isto é que o cálculo da frequência de distribuição não leva em conta a distância na qual as amostras foram coletadas no campo.

Uma das formas de identificar a presença de dependência espacial é a utilização da Geoestatística. A Geoestatística se fundamenta na “Teoria das variáveis regionalizadas” proposta e fundamentada por Matheron (1963).

Matheron (1971) citado por Vieira (2000), define variáveis regionalizadas como uma função espacial numérica que varia de um local para outro, com continuidade aparente e cuja variação não pode ser representada por uma função matemática simples.

Andriotti (2003) caracteriza variável regionalizada como um fenômeno aleatório e estruturado, ou seja, é aleatório no sentido de que os valores das medições feitas, podem variar consideravelmente entre si, e sua característica regionalizada, estruturada segundo uma certa lei no espaço. Isto é evidente se considerar que os valores das observações com que se trabalha não são completamente independentes da sua localização geográfica.

De acordo com a teoria, próximo a um valor elevado é mais provável que seja encontrado outro valor elevado. De acordo com a teoria de probabilidades, os valores dessas duas observações próximas estão correlacionados.

Segundo Andriotti (2003) regionalização é o caráter estruturado dos fenômenos, e a linguagem que permite tratá-los como tal é a das funções aleatórias. Exemplos de variáveis regionalizadas pode-se citar o teor de um elemento químico em uma rocha, a espessura de uma camada de rochas em certa região, etc. Quase todas as variáveis quantitativas com que se trabalha nas Ciências da Terra podem ser consideradas Variáveis regionalizadas.

Santos (2010) explica que se  $\mathbf{x}$  representa uma posição de uma, duas ou mais dimensões da região  $D$ , então a variável aleatória regionalizada  $Z(\mathbf{x})$  (apresentada na Seção 2.1) é representada pela adição dos termos  $\mu(\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon'(\mathbf{x})$  e  $\varepsilon''$ , e cada um deles podem ser definidos como segue:

- $\mu(\mathbf{x})$  é uma função determinística que representa a componente estrutural;
- $\varepsilon'(\mathbf{x})$  é um termo estocástico que varia localmente e depende espacialmente de  $\mu(\mathbf{x})$ ;
- $\varepsilon''$  é um ruído aleatório não correlacionado que tem distribuição normal com média zero e variância  $\sigma^2$ .

A componente determinística  $\mu(\mathbf{x})$  deve ter uma função própria e por isso é necessário a utilização de hipóteses que garantam a Estacionariedade (definida posteriormente), isto é, momentos estatísticos da variável aleatória constantes para qualquer vetor  $\mathbf{h}$ .

De acordo com Camargo (1997), o número  $k$  de momentos define a ordem  $k$  de Estacionariedade da variável. De acordo com Vieira (2000) regionalização é o caráter estruturado dos fenômenos e a linguagem que permite tratá-los como tal é a das Funções Aleatórias. Em outras palavras: por meio das Funções Aleatórias estudam-se as variáveis regionalizadas.

Desta maneira para estudar as variáveis regionalizadas e compreender o conceito de estacionariedade de uma variável aleatória regionalizada, faz-se necessária a definição de Função Aleatória (FA).

### **2.1.2 Função Aleatória (FA)**

De acordo com Andriotti (2003) uma variável aleatória (VA) é aquela que pode assumir uma certa quantidade de valores segundo uma determinada lei de probabilidade, ou seja, é uma família de valores possíveis, cada valor associado a uma dada probabilidade. Para exemplificar uma Variável Aleatória pode se utilizar a tiragem de um dado, para este fato existe um número de possibilidades e para cada um deles existe igual probabilidade de

ocorrência (seis valores possíveis, cada um com uma probabilidade de ocorrência igual a 1/6) é um exemplo de VA.

Qualquer face do dado resultante de uma jogada isolada é chamada de realização da Variável Aleatória *tiragem de dado*. Da mesma forma, o teor de um determinado elemento em um certo ponto é uma realização da VA teor do elemento. Como Função Aleatória (FA), Andriotti (2003) define da seguinte forma: é uma VA a uma infinidade de componentes, ou seja, o conjunto infinito das VAs constitui o que se chama de Função Aleatória (FA).

Yamamoto e Landim (2013) explicam que o lançamento de dados pode ser repetido indefinidamente (condição que os autores nomeiam como *condição A*) e os resultados obtidos são independentes de lançamentos anteriores (nomeiam como *condição B*) e de acordo com os mesmos, quando se analisa dados geológicos como o teor de um elemento metálico no solo, por exemplo, ao se retirar uma amostra num determinado ponto, o seu teor é um valor único, fisicamente determinado, sendo impossível a repetição desse experimento. Se fosse retirada uma amostra de um ponto muito próximo seria possível dizer que a *condição A* estaria satisfeita. Porém, não estaria respeitando a *condição B*.

O formalismo geoestatístico é baseado no conceito de dependência espacial e no entendimento de que cada ponto no espaço não apresenta um único valor, mas sim uma distribuição de probabilidade de ocorrência de valores. (...) no ponto  $x$  a propriedade  $Z(x)$  é uma VA com média  $m$ , variância  $S^2$  e uma função de distribuição acumulada. O conjunto de VA constitui uma Função Aleatória (YAMAMOTO, LANDIM, 2013).

A aplicação de inferências estatísticas ocorre lançando mão de algumas hipóteses suplementares sobre as FAs em estudo, as chamadas hipóteses restritivas, que visam fundamentalmente a reduzir os parâmetros dos quais depende a sua lei (ANDRIOTTI, 2003).

### **2.1.3 Função de Probabilidade e Função Indicadora**

Mood, Graybill e Boes (1974) definem função de probabilidade e função indicadora e suas propriedades do seguinte modo: A função de probabilidade  $P(\cdot)$  é um conjunto com o domínio  $A$  (uma álgebra de eventos) e contradomínio o intervalo  $[0,1]$  que satisfaz os seguintes axiomas:

i)  $P[A] \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

ii)  $P(\Omega) \geq 0$

iii) Se  $A_1, A_2, \dots$  é uma sequência de eventos mutuamente exclusivos em  $A$  que

$A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j; i, j = 1, 2, \dots$  e se  $A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ , quando

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

A definição de probabilidade é uma definição matemática, baseada nos axiomas formalizados por Kolmogorov e todo estudo probabilístico deve satisfazê-los. De acordo com Mood, Graybill e Boes (1974) a definição de função indicadora segue da seguinte forma:

Seja  $\Omega$  qualquer espaço com pontos  $W$  e  $A$ , qualquer subconjunto de  $\Omega$ . A função indicadora de  $A$ , denotada por  $I_A(\cdot)$  é uma função com domínio  $\Omega$  e contradomínio igual ao conjunto constituído pelos dois números reais 0 e 1 definidos por:

$$I_A(W) = \begin{cases} 1, & \text{se } W \in A \\ 0, & \text{se } W \notin A \end{cases}$$

$I_A(\cdot)$  claramente “indica” o conjunto  $A$ .

Os autores definem ainda as propriedades a que está sujeita toda função indicadora:

Seja  $\Omega$  qualquer espaço e  $\mathcal{A}$  qualquer coleção de subconjuntos de  $\Omega$ :

i)  $I_A(w) = 1 - I_{\bar{A}}(w)$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

ii)  $I_{A_1, A_2, \dots, A_n}(w) = I_{A_1}(W) \cdot I_{A_2}(W) \cdot \dots \cdot I_{A_n}(W)$  para  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ .

iii)  $I_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}(w) = \max[I_{A_1}(W), I_{A_2}(W), \dots, I_{A_n}(W)]$  para  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ .

A função indicadora será utilizada para indicar subconjunto da reta real. Os autores apresentam uma notação específica para função indicadora com codificação binária (0,1) da seguinte forma (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974):

$$I_{\{[0,1]\}}(x) = I_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} .$$

#### 2.1.4 Hipóteses de Estacionariedade

Andriotti (2003) define uma função aleatória como estacionária, aquela cuja distribuição de probabilidades é invariante por translação, ou seja, os fatores controladores do seu comportamento agem de forma similar em toda a área em estudo.

Santos (2010) aponta que a estacionariedade é uma propriedade de modelo probabilístico, e pode variar com a mudança de escala do estudo ou a medida que novos dados são disponibilizados. E acrescenta ainda, que a existência de estacionariedade permite agrupar observações obtidas em diferentes posições da área em estudo, gerando diferentes semivariogramas.

Journel e Huijbregts (1978) citado por Vieira (2000) afirmam que a variável regionalizada  $Z(\mathbf{x}_i)$ , para qualquer  $\mathbf{x}_i$  dentro de uma área  $S$ , pode ser considerada uma realização do conjunto de variáveis aleatórias  $Z(\mathbf{x}_i)$ . Esse conjunto de variáveis aleatórias é denominado uma função aleatória e é simbolizado por  $Z(\mathbf{x}_i)$ . O autor explica que tal afirmação se faz necessário porque uma função aleatória, pelo fato de ser contínua, pode ser submetida a uma gama de hipóteses, sem as quais a dedução de equações é impossível. O que se espera de pontos discretos de amostragem é que possam ser satisfeitas as hipóteses às quais as funções aleatórias estão sujeitas. Pois, com uma única amostragem, tudo o que se sabe de uma função aleatória  $Z(\mathbf{x}_i)$  é uma única realização. Então, para estimar valores para locais não amostrados, ter-se-á de introduzir a restrição de que a variável regionalizada ( $VR$ ) seja necessariamente estacionária estatisticamente. O autor admite a existência de três hipóteses de estacionariedade de uma função aleatória  $Z(\mathbf{x}_i)$ , e afirma que pelo menos uma delas deve ser satisfeita para se fazer qualquer aplicação geoestatística, que são elas: (a) a estacionariedade de 2ª ordem; (b) hipótese intrínseca e (c) hipótese de tendência.

Para melhor compreensão, Vieira (2000) faz a seguinte proposição: considere  $z(\mathbf{x}_i)$  e  $z(\mathbf{x}_i+\mathbf{h})$  valores da variável regionalizada em pontos distintos, separados pelo vetor  $\mathbf{h}$ . Pode se

definir hipóteses de estacionariedade de 1ª ordem, 2ª ordem e intrínseca (do semivariograma) as condições em que as variáveis regionalizadas  $Z(\mathbf{x}_i)$  e  $Z(\mathbf{x}_i+\mathbf{h})$  devem satisfazer para que se possa considerá-las como elementos de um espaço amostral contínuo e possa aplicar a geoestatística. Então, para estimar valores para os locais não amostrados, ter-se-á de introduzir a restrição de que a variável regionalizada seja, necessariamente, estacionária e os momentos estatísticos da variável aleatória  $Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})$  sejam os mesmos para qualquer vetor  $\mathbf{h}$ . De acordo com o número  $k$  de momentos estatísticos que são constantes a variável é chamada de estacionária de ordem  $k$  (VIEIRA, 2000).

Uma FA estacionária é aquela cuja lei de distribuição de probabilidade é invariante por translação, ou seja, os fatores controladores do seu comportamento agiram de forma similar em toda a áreas estudada. A VR estudada é homogênea com respeito a suas características estatísticas e as correlações existentes se mantêm para as mesmas distâncias, devendo ser consideradas, sempre, a escala de trabalho (ANDRIOTTI, 2003).

Essa relação pode ser classificada e expressa do seguinte modo:

i) *Estacionariedade de primeira ordem*

$$E[Z(\mathbf{x}_i)] = E[Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})] = m(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) = m(\mathbf{x})$$

onde  $m(\mathbf{x}_i)$  é a Esperança Matemática no ponto  $\mathbf{x}_i$ , ou seja,  $m$  é uma constante independente de  $\mathbf{x}_i$ , simplificando-se por  $m = E[Z(\mathbf{x}_i)] = E[Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})]$ .

ii) *Estacionariedade de 2ª ordem*

Vieira (2000) mostra que uma função aleatória  $Z(\mathbf{x}_i)$  é estacionária de ordem 2 se:  $E[Z(\mathbf{x}_i)] = m$  nas seguintes condições:

- (a) O valor esperado  $E[Z(\mathbf{x}_i)]$  existir e não depender da posição  $\mathbf{x}_i$ , ou seja, para qualquer  $\mathbf{x}_i$  dentro da área  $S$ .
- (b) Para qualquer par de variáveis aleatórias,  $Z(\mathbf{x}_i)$  e  $Z(\mathbf{x}_i+\mathbf{h})$ , a função covariância,  $Cov(\mathbf{h})$ , existir e for função de  $\mathbf{h}$ :

$$Cov(\mathbf{h}) = E\{Z(\mathbf{x}_i)Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})\} - m^2$$

para qualquer  $\mathbf{x}_i$  dentro da área  $S$ .

Para o caso particular em que  $\mathbf{h} = 0$ , ter-se-á  $Cov(0) = E[Z(x)]^2$ , ou seja, trata-se da variância da VA,  $Z(x)$ ; uma FA,  $Z(x)$  só admitirá covariância se tiver uma variância  $Cov(0)$  finita.

### iii) Estacionariedade Intrínseca ou do Semivariograma

Como já dito, a hipótese de estacionariedade de ordem 2 implica a existência de uma variância finita dos valores medidos,  $Var\{Z(x_i)\} = Cov(0)$ . Mas, esta hipótese pode não ser satisfeita para alguns fenômenos físicos que apresentam uma capacidade de dispersão infinita. Exemplos desses casos incluem a concentração de ouro em minas da África do Sul (VIEIRA, 2000).

Uma função aleatória é intrínseca quando além de satisfazer a condição expressa na Seção 2.1.3, a estacionariedade do primeiro momento estatístico e o incremento  $\{Z(x_i) - Z(x_i + \mathbf{h})\}$  também possuir variância finita e não depender de  $x_i$ , para qualquer valor de  $\mathbf{h}$ . Matematicamente, esta relação pode ser expressa como:

$$E\left\{\left[Z(x + \mathbf{h}) - Z(x)\right]^2\right\} = Var\left[Z(x + \mathbf{h}) - Z(x)\right] = 2\gamma(\mathbf{h})$$

$$2\gamma(h) = E\left\{\left[Z(x_i) - Z(x_i + h)\right]^2\right\}$$

que resulta na função intrínseca,  $\gamma(h)$ , o semivariograma.

A razão para o prefixo “semi” é devido a equação ser escrita por

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\left\{\left[Z(x_i) - Z(x_i + h)\right]^2\right\}.$$

Não sendo todos os momentos invariantes por translação (*Estacionariedade Estrita*), considera-se a invariabilidade apenas dos dois primeiros momentos (média e covariância) e assume uma hipótese mais fraca que a estacionariedade de 2ª ordem, chamada *estacionariedade intrínseca*. Neste caso, assume-se que somente o semivariograma existe e é estacionário (ANDRIOTTI, 2003).

Desta abordagem fica claro que a hipótese intrínseca é menos restritiva e por isso é a mais usada em geoestatística. Pois, a existência da covariância implica na existência do variograma, mas o contrário não é válido.

## 2.2 Semivariograma

O variograma é uma função intrínseca que reflete a estrutura do fenômeno estudado, medindo as relações estatísticas- pelas covariâncias- que existem entre as amostras espaçadas de sucessivos valores de  $h$ . É uma função que é crescente com  $h$  até atingir um determinado valor de  $h$ , valor conhecido como amplitude ou Alcance, a partir do qual a função não apresenta dependência espacial.

A equação utilizada para elaboração de um semivariograma experimental (oriundo das amostras coletadas) é expressa por (VIEIRA, 2000):

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N_h} \sum_{i=1}^{N_h} [Z(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})]^2 \quad (1)$$

onde  $z(\mathbf{x}_i)$  é o valor observado da variável  $Z$  na posição  $(\mathbf{x}_i)$ ,  $z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})$  é o valor observado da variável aleatória  $Z$  na posição  $(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})$  e  $N_h$  é o número de pares de valores separados entre si por uma magnitude  $\mathbf{h}$ , na direção do vetor (ANDRIOTTI, 2003).

De acordo com Vieira (2000) quando o gráfico do semivariograma é idêntico para qualquer direção  $h$ , ele é chamado isotrópico e representa uma situação bem mais simples do que quando ele é anisotrópico (tema que será tratado na Seção 2.3).

### 2.2.1 Semivariograma teórico

É aquele que representa uma função crescente que relaciona a variação média dos dados a medida que  $\mathbf{h}$  (*lag*) cresce tendendo a um alcance máximo chamado de alcance teórico ( $a_0$ ). O modelo teórico de semivariograma é representado por uma fórmula a qual é utilizada para estudar o comportamento dos dados em relação a dependência espacial.

Ao se construir o semivariograma para uma determinada variável deve-se estabelecer alguns parâmetros que são peculiares à sua representação, são eles: o patamar ( $C$ ), a contribuição ( $C_1$ ), o efeito pepita ( $C_0$ ) e o alcance ( $a$ ).

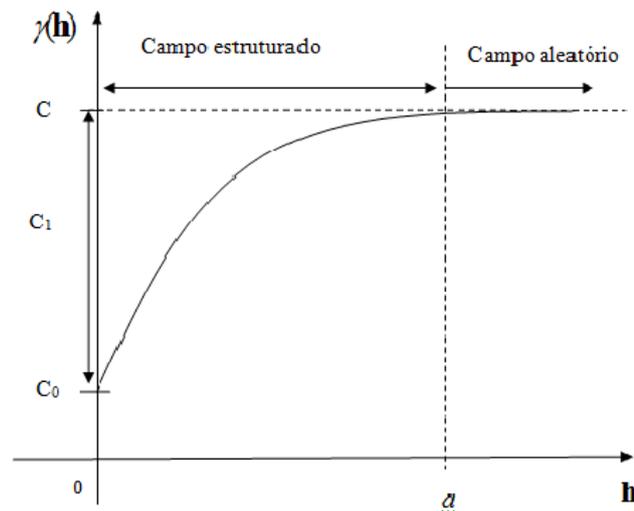


Figura 1 - Modelo de semivariograma com os parâmetros  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C$  e  $a$ .

De acordo com Landim (2006) o alcance ( $a$ ) é a distância a partir da qual as amostras passam a não possuir correlação espacial, ou seja, torna-se aleatória. O patamar ( $C$ ) determina a variabilidade máxima entre os pares de valores, isto é, a variância dos dados, e consequentemente, covariância nula e é a ordenada correspondente a abscissa ( $a$ ), chamada alcance. O Efeito Pepita ( $C_0$ ), representa a descontinuidade do semivariograma quando  $h=0$  e a Contribuição ( $C_1$ ) representa a diferença entre o patamar e o efeito pepita (ANDRIOTTI, 2003).

Os Modelos Teóricos de Semivariograma são divididos em modelos com patamar e modelos sem patamar (que não serão abordados neste trabalho). Os principais modelos com patamar, de acordo com Andriotti (2003), são: O modelo Esférico, o modelo Exponencial e o modelo Gaussiano.

#### i) O modelo Esférico

A equação do modelo esférico é dada por:

$$\begin{cases} \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\mathbf{h}}{a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{h}}{a} \right)^2 \right]; & 0 \leq \mathbf{h} \leq a \\ \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1; & \mathbf{h} > a \end{cases}$$

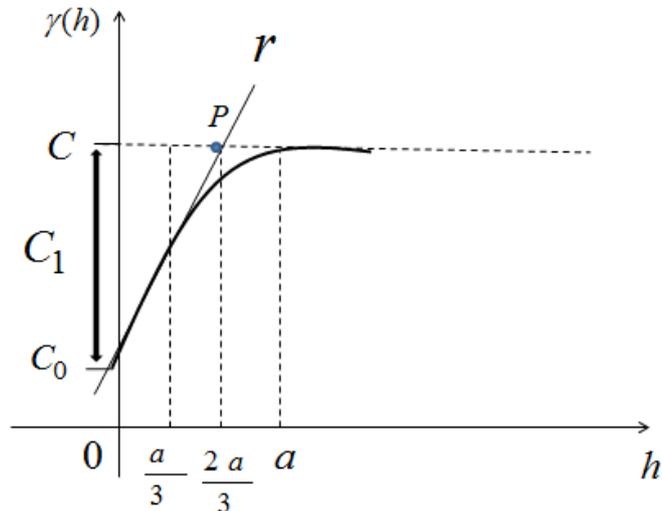


Figura 2 - modelo de semivariograma representando a reta tangente ( $r$ ), que determina a proporção do alcance prático.

A Figura 2 mostra o gráfico do modelo teórico de semivariograma esférico, bem como indica os parâmetros de interesse onde,  $C_0$  é efeito pepita (que será discutido mais detalhadamente numa seção posterior),  $C_1$  é a contribuição,  $C$  é o patamar e  $a$  é o alcance prático (assunto discutido em uma seção posterior) onde  $2/3 a$  corresponde ao alcance teórico ( $a_0$ ) no eixo horizontal ( $h$ ) e  $1/3 a$  corresponde a parte do alcance em que a curva da função semivariograma sobrepõe uma reta (ANDRIOTTI, 2003).

Na intenção de explicar as peculiaridades de cada um dos principais modelos de semivariograma em relação ao patamar será apresentado a seguir um desenvolvimento matemático que justifique estas peculiaridades.

Partindo do pressuposto que todos os modelos de semivariograma que atingem patamar exatamente ou assintoticamente e este é atingido no ponto de abscissa  $a$ , onde é atingido por meio do limite da função variograma. Daí, aplicando-se o limite para  $\mathbf{h}$  e fazendo  $\mathbf{h}$  tender ao alcance  $a$  tem-se:

Seja  $a$ , a distância máxima a qual se pode considerar a dependência espacial e  $a > 0$  e seja  $h$  o lag (distância) entre as amostras ( $0 < h < a$ ). Admitindo que  $h$  possa crescer tanto que aproxime ao máximo de  $a$ , por limite, tem-se:

$$\lim_{h \rightarrow a} \left[ C_0 + C_1 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \right] = L$$

Pelas propriedades de limite, tem-se que limite da soma é igual a soma dos limites:

$$\lim_{h \rightarrow a} C_0 + \lim_{h \rightarrow a} C_1 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] = L$$

$$\lim_{h \rightarrow a} C_0 + \frac{3}{2} \lim_{h \rightarrow a} C_1 - \frac{1}{2} C_1 \cdot \lim_{h \rightarrow a} \left( \frac{h}{a} \right)^2 = L$$

Como  $h < a$ , tem-se que  $h \rightarrow a^-$ :

$$\lim_{h \rightarrow a} C_0 + \frac{3}{2} C_1 - \frac{1}{2} C_1 = L$$

$$C_0 + \frac{2}{2} C_1 = L$$

$$C_0 + C_1 = L$$

De acordo com o resultado da demonstração acima, conclui-se que o Modelo Esférico atinge o patamar ( $C$ ) no ponto de abscissa  $h = a$ .

De acordo com alguns autores dos quais pode se destacar Trøgtmar et al. (1987) e Salviano (1996) o modelo de variograma esférico é o mais adequado para descrever o comportamento de atributos de plantas e de solos.

Segundo Andriotti (2003) o modelo esférico é o único dos modelos que atinge verdadeiramente o patamar e tem um pequeno efeito pepita comparado ao valor do patamar. Neste modelo, representado pela Figura 2, o alcance teórico corresponde a 2/3 do alcance

prático e traçando uma semi reta no ponto de abscissa  $\mathbf{h} = 0$  que intercepta a reta horizontal passando pelo primeiro ponto mais próximo de  $\mathbf{h} = 0$ , obtém-se  $1/3 \mathbf{a}$  (distância até onde o modelo define aproximadamente, uma reta). O alcance teórico  $a_0$  é definido neste modelo por meio de uma reta tangente a curva do modelo partindo do ponto de efeito pepita  $C_0$  e interceptando o patamar  $C$  quando  $a_0 = \frac{2}{3} a$  (ANDRIOTTI, 2003).

## ii) Modelo Exponencial

A equação do modelo exponencial é:

$$\begin{cases} \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 \left[ 1 - e^{-3\left(\frac{\mathbf{h}}{a}\right)} \right]; & 0 < \mathbf{h} < a \\ \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1; & \mathbf{h} > a \end{cases}$$

Onde:  $d$  é a máxima distância na qual o variograma é definido. A diferença entre o modelo exponencial e o esférico é que o modelo exponencial atinge o patamar apenas assintoticamente (ANDRIOTTI, 2003), ou seja, a função semivariograma não é definida em  $C$ . Deste modo o patamar é atingido através do limite da função quando  $\mathbf{h} \rightarrow a$ . Isto pode ser demonstrado, matematicamente, da seguinte forma:

Seja  $a$ , a distância máxima a qual pode se considerar a dependência espacial ( $a > 0$ ) e seja  $\mathbf{h}$  o lag (passo) entre as amostras ( $0 < \mathbf{h} < a$ ). Admitindo que  $\mathbf{h}$  possa crescer tanto que aproxime ao máximo de  $a$ , por limite, tem-se:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} [C_0 + C_1 (1 - e^{-3\left(\frac{\mathbf{h}}{a}\right)})] = L$$

Pelas propriedades de limite, o limite da soma é igual a soma dos limites:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} C_0 + \lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} C_1 \left[ 1 - e^{-3\left(\frac{\mathbf{h}}{a}\right)} \right] = L$$

$$\lim_{h \rightarrow a} C_0 + \lim_{h \rightarrow a} C_1 - C_1 \lim_{h \rightarrow a} e^{-3 \frac{|h|}{a}} = L$$

Como  $h < a$ , tem-se que  $h \rightarrow a^-$ :

$$\lim_{h \rightarrow a} C_0 + \lim_{h \rightarrow a} C_1 - C_1 \lim_{h \rightarrow a^-} e^{-3 \frac{|h|}{a}} = L$$

$$C_0 + C_1 - C_1 [e^{-3.1}] = L$$

$$C_0 + C_1 (1 - e^{-3}) = L$$

$$C_0 + C_1 (1 - 0,04978...) = L$$

$$C_0 + C_1 (0,95022) = L$$

Considerando que  $C_0$ , teoricamente, é igual a  $C(0)=0$ , ou seja, a semivariância da variável para  $h = 0$ . Pode se concluir que a contribuição,  $C_1$ , para  $h$  tendendo a  $a$  ( $h \rightarrow a$ ) e  $C_0 = 0$  é determinada em 0,95  $C_1$ . O que significa que no modelo exponencial o Patamar ( $C$ ) é obtido assintoticamente, com aproximadamente 95% de  $C$ , quando  $h$  tende a  $a$ . Por limite, pode se dizer que este modelo atinge o patamar assintoticamente quando  $h$  tende ao infinito.

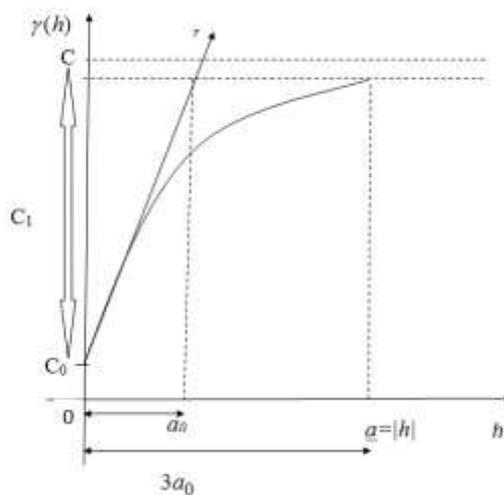


Figura 3 - Modelo Teórico de Semivariograma Exponencial

O modelo exponencial aumenta mais lentamente partindo da origem em direção ao patamar, e não se pode dizer realmente que o modelo atinja o patamar (LAMPARELLI et al., 2003 apud SILVA et al., 2011). Os autores sugerem que caso o efeito pepita seja muito pequeno e a estrutura de variabilidade crescer de maneira bastante suave, o variograma pode ser melhor ajustado pelo modelo Gaussiano.

### iii) Modelo Gaussiano

De modo similar ao modelo exponencial, o patamar ( $C$ ) é atingido assintoticamente em 95%. Este modelo é altamente desejável por apresentar boas propriedades, como continuidade na variabilidade, a medida que os pontos se afastam entre si. A expressão do modelo Gaussiano é dada por:

$$\begin{cases} \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 \left[ 1 - e^{-3\left(\frac{h}{a}\right)^2} \right]; & 0 \leq \mathbf{h} \leq a \\ \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1; & \mathbf{h} > a \end{cases}$$

Onde  $C_0$  é o valor do efeito pepita,  $C_1$  é a Contribuição e  $C$  é o patamar que representa a relação  $C = C_0 + C_1$ ,  $\mathbf{h}$  é o vetor de distância utilizada entre as amostras e  $a$  é o alcance prático ou a distância máxima em que as amostras encontram-se correlacionadas espacialmente.

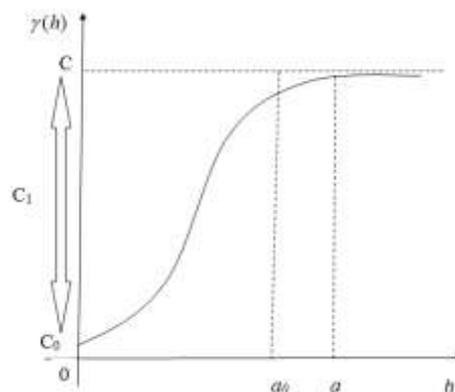


Figura 4 - Modelo de Semivariograma Gaussiano.

O modelo Gaussiano é um modelo transitivo, muitas vezes usado para modelar fenômenos extremamente contínuos (ISAAKS, SRIVASTAVA, 1989 apud SILVA et al., 2011).

De maneira similar ao modelo Exponencial, obtém-se o patamar do modelo teórico de semivariograma aplicando a teoria de limite na função definida pelo modelo para  $h$  tendendo a  $a$ . Segue-se o desenvolvimento do limite da função para  $(\mathbf{h} \rightarrow a)$  em que obtém-se:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} \left[ C_0 + C_1 \left( 1 - e^{-3 \left( \frac{\mathbf{h}}{a} \right)^2} \right) \right] = L$$

Pelas propriedades de limite, o limite da soma é igual a soma dos limites:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} C_0 + \lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} C_1 \left[ 1 - e^{-3 \left( \frac{\mathbf{h}}{a} \right)^2} \right] = L$$

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} C_0 + \lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} C_1 - C_1 \cdot \lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} e^{-3 \left( \frac{\mathbf{h}}{a} \right)^2} = L$$

Como  $\mathbf{h} < a$ , com a condição que  $\mathbf{h}$  possa aproximar pela esquerda, tanto quanto queira de  $a$  ( $\mathbf{h} \rightarrow a^-$ ):

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} C_0 + \lim_{\mathbf{h} \rightarrow a} C_1 - C_1 \cdot \lim_{\mathbf{h} \rightarrow a^-} e^{-3 \left( \frac{\mathbf{h}}{a} \right)^2} = L$$

$$C_0 + C_1 - C_1 \left[ e^{-3.1} \right] = L$$

$$C_0 + C_1(1 - e^{-3}) = L$$

$$C_0 + C_1(1 - 0,04978...) = L$$

$$C_0 + C_1(0,95022) = L$$

Deste modo o modelo teórico Gaussiano atinge a mesma proporção do patamar que o modelo Exponencial, que é de 95%, aproximadamente. Este modelo se caracteriza por apresentar um comportamento parabólico próximo à origem (ANDRIOTTI, 2003).

### **2.2.2 O Alcance prático ( $a$ ) e o alcance teórico ( $a_0$ )**

O alcance ( $a$ ) é definido em Andriotti (2003) como a distância a partir da qual as amostras passam a ser independentes, ou seja, a partir da qual a variação média entre duas observações não são mais função da distância entre elas, dando lugar a independência, objeto de estudo da Estatística clássica.

Em suma o alcance reflete o grau de homogeneidade entre as amostras vizinhas, assim, quanto maior o alcance maior será a homogeneidade entre elas.

Levando em consideração a importância da compreensão do alcance prático ( $a$ ) na representação do semivariograma, a partir de agora será discutido com mais detalhe a relação proporcional deste parâmetro com o alcance teórico ( $a_0$ ), definido analiticamente para cada modelo teórico de Semivariograma.

Compreender a maneira como é calculado o alcance teórico ( $a_0$ ) é importante porque este parâmetro, embora não apareça em alguns dos output de muitos softwares, é utilizado para fazer as transformações geométricas que procedem para correção da anisotropia (tema abordado em um tópico posterior), bem como para a definição da região de abrangência da geoestatística e na definição da quantidade de vizinhos utilizada para predição por Krigagem.

A definição de Alcance ( $a$ ) apresentada por Andriotti (2003) se refere ao alcance prático. Porém, de acordo com o autor, além do alcance prático existe o alcance teórico ( $a_0$ ) que pode

ser definido como a abscissa do ponto P de intersecção da reta que tangencia a curva do modelo.

A representação gráfica apresentada na Figura 2 da seção 2.2.1., mostra um modelo de semivariograma teórico utilizando o modelo esférico, que a partir de agora será utilizado como referência para a demonstração da relação entre o alcance prático ( $a$ ) e o alcance teórico ( $a_0$ ).

Na intenção de demonstrar as relações entre o alcance teórico e o alcance prático, utiliza-se para isto, o modelo de semivariograma esférico, cuja função é definida por

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 1,5 \frac{\mathbf{h}}{a} + 0,5 \left( \frac{\mathbf{h}}{a} \right)^3, & \text{se } \mathbf{h} \leq a \\ 1, & \text{para outros casos} \end{cases}$$

onde  $\mathbf{h}$  representa a distância entre as amostras e  $a$  é o alcance prático.

Segundo Andriotti (2003), para as funções aleatórias (FAs) estacionárias é válida a relação

$$\gamma(h) = C_{(0)} - C_{(h)}$$

Aplicando a derivada de  $\gamma(h)$  em função de  $h$ , quando  $h$  atinge a dimensão de  $a$  (congruência) tem-se a relação do alcance teórico, que representa 2/3 do alcance prático, para o modelo esférico.

De acordo com Andriotti (2003) a derivada da função semivariograma define o coeficiente angular da tangente a função,  $m(\gamma) = \frac{\partial(\gamma)}{\partial(h)}$ , no ponto ( $\mathbf{h}=0$ ). Disto decorre que a inclinação da reta tangente a curva da função, para o modelo esférico é dada pela derivada da função do modelo em relação a  $\mathbf{h}$ . Para o modelo esférico a sua derivada é dada por:

$$m(\gamma) = \frac{3C_1}{2a}$$

De acordo com o mesmo autor, o alcance prático ( $a_0$ ) é a abscissa do ponto de intersecção com o ponto máximo da função semivariogama,  $\gamma(h) = C$  e a ordenada deste ponto é o seu patamar ( $C$ ) para a abscissa do ponto  $h = a_0$ . O valor do alcance prático ( $a_0$ ) é obtido a partir da reta tangente que passa por  $C_0$  e intercepta a reta horizontal no ponto de patamar ( $C$ ) representando assim, a proporção do alcance prático ( $a$ ) atingido e cuja proporção para este modelo é  $2/3$  do alcance prático. De forma simples pode-se provar isso para o modelo esférico, partindo da definição de equação da reta tangente:

Simmons (1987) define a equação da reta como

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (\text{I})$$

Dado que existe um ponto conhecido  $P(x_0, y_0)$  e  $m$  representa o coeficiente angular da reta, ou seja, a inclinação da reta em relação ao eixo  $x$ .

Para melhor compreensão do significado da equação (I), imaginemos um ponto  $(x, y)$  movendo-se ao longo da reta dada. Quando esse ponto se move suas coordenadas  $x$  e  $y$  variam, mas matem-se ligados pela relação fixa expressa por  $m$ . Essa relação é definida pela

$$\text{razão } m = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Se o ponto  $P$  conhecido é o ponto em que a reta corta o eixo  $y$ ,  $P(0, b)$ , então a equação(I) torna-se

$$Y - b = m(x - 0)$$

que resulta em

$$y = mx + b. \quad (\text{II})$$

O número  $b$  é chamado *coeficiente linear*, o termo  $m$  é chamado *coeficiente angular* e a equação (II) chama-se *equação reduzida* da reta.

De acordo com Simmons (1987) a equação (II) é bastante conveniente porque nos revela, num relance, a localização e a direção da reta. Sua equação fica especificada pelo ponto onde a reta corta o eixo  $y$  e o *coeficiente angular* ( $m$ ).

De acordo com a Figura 2 (seção 2.2.1), o alcance teórico é definido analiticamente por meio de uma reta que tangencia a curva do modelo e tem os seguintes pontos conhecidos, que denotaremos por  $P(0, C_0)$  e  $Q(a_0, C)$ . A partir destes pontos podemos deduzir que  $C_0$  é o *coeficiente linear* da reta que tangencia o modelo e o ponto  $Q$  representa o ponto máximo até onde as amostras apresentam dependência espacial. A definição do alcance teórico ( $a_0$ ) de forma analítica representa uma proporção do alcance prático ( $a$ ) que pode ser demonstrada a partir da demonstração a seguir.

Para provarmos da relação entre o alcance teórico ( $a_0$ ) e o alcance prático, vamos partir da fórmula da equação reduzida da reta tangente a curva ( $Y = mx + b$ ) e considerando que  $b$  (coeficiente linear da reta) é o efeito pepita  $C_0 = 0$ ,  $m$  é o coeficiente angular [derivada da função  $m(\gamma)$ ]. O Patamar ( $C$ ) é o valor máximo da função determinado pelo ponto  $P(a_0, C)$ . Daí, substituindo o ponto  $P$  na *equação reduzida* da reta, temos:

$$Y = m \cdot x + b$$

$$Y = \frac{3C}{2} x + b$$

$$C = \left[ \frac{3C}{2} \right] \cdot a_0 + 0$$

$$2C = 3C \cdot a_0$$

$$a_0 = \frac{2C}{3C}$$

$$a_0 = \frac{2}{3}$$

Desta forma encontra-se que o Alcance Teórico ( $a_0$ ) equivale a  $2/3$  do Alcance prático ( $a$ ).

Utilizando procedimento análogo obtém-se no modelo exponencial o alcance teórico igual a  $1/3$  do alcance prático, e no modelo Gaussiano obtém-se para o alcance teórico,  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  do alcance prático.

O valor do alcance teórico é sempre inferior ao alcance prático por questão analítica de que a reta tangente atinge a reta horizontal do Patamar em um ponto anterior ao do alcance prático, representado na Figura 2 (seção 2.2.1). Como os softwares são programados para processar por meio de transformações de vetores, a partir desta proporção entre o alcance teórico e o alcance prático os mesmos obtêm primeiramente o  $a_0$  e são programados para fazer a correção do valor de  $a$  que se processa por meio da multiplicação do  $a_0$  pelo fator que corresponder para cada modelo e ajustando-o para o alcance prático.

É importante mencionar que  $a_0$  compõe a abscissa do ponto de intercepto da reta tangente a curva do modelo com o patamar. Sua obtenção é necessária para fazer transformações algébricas para se corrigir a anisotropia *geométrica*, *zonal* ou *combinada* (que será discutido em tópico posterior), quando detectada.

### 2.2.3 Efeito Pepita e pepita puro

De acordo com Andriotti (2003) se fosse possível coletar duas amostras no mesmo local, ou seja, se  $h$  pudesse ser igual a zero, considerando a inexistência de erros de qualquer espécie, essas duas amostras deveriam registrar o mesmo valor para qualquer variável que fosse estudada. Na prática, entretanto, trabalha-se com os limites, ou seja, quando a distância entre dois pontos diminui gradativamente, tendendo a zero, a descontinuidade que pode ocorrer nesse ponto (a origem do variograma), recebe o nome de efeito pepita.

O efeito pepita ( $C_0$ ) representa a variância não explicada, ou ao acaso, frequentemente causada por erros de medições ou variações das propriedades que não podem ser detectadas na escala de amostragem (VIEIRA, 2000).

Efeito pepita puro (*EPP*) é entendido quando o variograma reflete a variação espacial de um fenômeno totalmente, sendo a variabilidade constante para qualquer distância. Esse termo tem origem na mineração de ouro, onde a inclusão de uma pepita de ouro em uma pequena amostra de um testemunho de sondagem é um evento aleatório (BURGUESS, WEBSTER, 1980).

Quando a variável estudada é independente espacialmente, o seu  $C_0$  (efeito pepita) é igual a  $C_1 + C_0$  (patamar), conhecido como efeito pepita puro (*EPP*). O *EPP* é importante e indica distribuição casual, ou seja, variabilidade não explicada ou variação não detectada, e pode ocorrer devido a erros de medidas, de amostragem ou microvariação não detectada, considerando ser o espaçamento de amostragem utilizado maior que o necessário para detectar dependência espacial (CAMBARDELLA et al., 1994).

Mendes, Fontes e Oliveira (2008) consideram que o semivariograma apresenta efeito pepita puro quando não é possível identificar a estrutura da variância e os valores da semivariância se mantêm a um determinado nível, comportando-se de forma mais ou menos constante, independentemente do aumento da distância entre amostras. Deste modo, pode-se assumir que, além da distribuição ocorrer completamente ao acaso, há independência entre as amostras e os métodos da estatística clássica podem ser aplicados, com a média aritmética representando bem o conjunto de dados.

Isto não significa que o semivariograma que apresenta efeito pepita puro não haja estrutura de variância, mas que pode haver dependência espacial para uma escala de distância menor que a distância entre os pontos, estabelecida na amostragem.

O efeito pepita e pepita puro podem ser representado graficamente por meio de uma função que relaciona o alcance ( $a$ ), o efeito pepita ( $C_0$ ) e o patamar ( $C_0 + C_1$ ). Veja a representação dessa relação na figura abaixo.

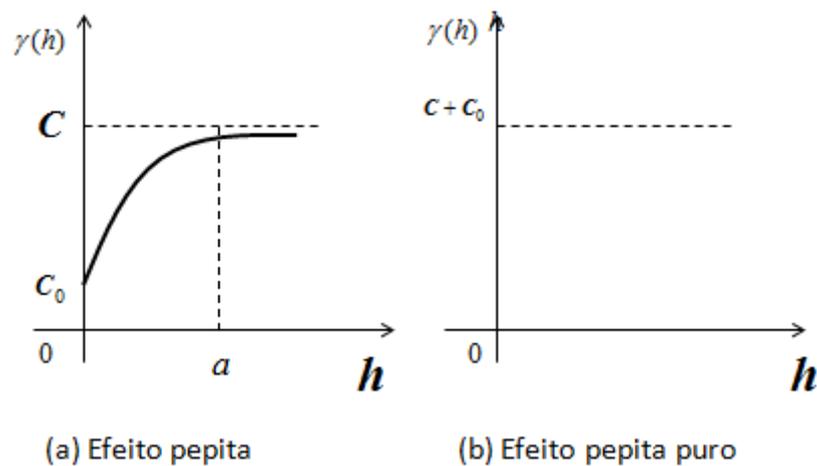


Figura 5 - Efeito Pepita e Pepita Puro.

Nota-se nos dois gráficos da Figura 5, (a) Efeito pepita e (b) Pepita puro, que no primeiro é possível estabelecer uma proporção entre  $C_0$  e  $C = C_0 + C_1$  e para o segundo, o alcance é igual ao efeito pepita, ou seja, não existe proporção entre  $C_0$  e  $C$  indicando que as amostras não tem dependência espacial e deste modo, para qualquer vetor  $\mathbf{h}$ , a variância é invariante.

### 2.3 Isotropia e anisotropia

Camargo, Felgueiras e Monteiro (2001) explica que a anisotropia é uma característica frequente nos elementos da natureza, isto é, a variabilidade ou distribuição espacial de tais elementos ocorre mais intensamente numa direção e menos intensamente em outra direção. De acordo com os autores, para a propriedade em estudo assume-se, dentro dos limites de interesse, estacionariedade de segunda ordem ou intrínseca (CAMARGO, 1997), cuja estrutura de autocorrelação espacial é geralmente identificada calculando-se semivariogramas experimentais em várias direções, desenhando todos num único gráfico, e visualmente avaliando suas similaridades. Quando um ou mais dos semivariogramas direcionais diferem acentuadamente um dos outros, deve-se ajustar um modelo anisotrópico que seja consistente com as diferenças indicadas.

Camargo, Felgueiras e Monteiro (2001) apresentam um estudo comparativo dos modelos isotrópico e anisotrópico por meio de um estudo de caso que gerou a distribuição espacial do teor de argila, dentro dos limites da área de estudo. Utilizando o estimador de krigagem ordinária, deixa evidente que muitos aspectos particulares dos dados ficariam ocultos sem o uso de semivariogramas e da modelagem da anisotropia, mostrando, por exemplo, a tendência da distribuição espacial nos dados de teor de argila.

É sabido que o semivariograma é função do vetor  $\mathbf{h}$ , por isso, quando o semivariograma é idêntico para qualquer direção de  $\mathbf{h}$  é chamado isotrópico. Quando isso não acontece ele é dito anisotrópico. A anisotropia é a existência de direções privilegiadas que condicionam a

Gênese do fenômeno em estudo (ANDRIOTTI, 2003) e neste caso o semivariograma deve sofrer algumas transformações antes de ser usado para gerar mapas.

Para uma análise criteriosa da dependência espacial faz-se necessário elaborar semivariograma experimentais para várias direções a fim de averiguar se existe direção privilegiada. Durante o procedimento da análise estrutural ao qual o pesquisador deve se submeter frequentemente, o mesmo se depara com situações onde obter um semivariograma comum para todas as direções (omnidirecional) parece tarefa impossível, ao passo que tentar obter um semivariograma para cada direção trará maiores problemas no momento de *plotar* o mapa temático.

Isso ocorre porque as semivariâncias dos valores observados sofrem forte influência da direção ao qual o fenômeno estudado ocorre naturalmente. A justificativa para tal afirmação se deve ao fato de que para gerar mapa de Krigagem, a *FA* além de verificar a hipótese de estacionariedade intrínseca é necessário atender a uma função do tipo positiva condicional (ANDRIOTTI, 2003), o que não pode ser garantido na presença da anisotropia.

A presença ou mesmo ausência de influência direcional do fenômeno é chamada na Geoestatística de *anisotropia* e *isotropia*, respectivamente. Encontra-se na maioria dos casos, estudos que são bastante acometidos por fatores que comumente se modificam em diferentes direções (anisotropia). Camargo, Felgueiras e Monteiro (2001), ressaltam que para lidar com a anisotropia, é importante que o modelo proposto represente bem a variabilidade espacial da área em estudo. Procedimentos determinísticos para este fim são limitados, porque não consideram a estrutura de autocorrelação espacial bem como a anisotropia presente. Modelos mais adequados para este objetivo, segundo os autores, vem sendo propostos.

Assim, a anisotropia constitui num problema que tem início nas primeiras etapas da obtenção do mapa temático e é próprio do comportamento da intensidade do atributo observado na área em estudo, logo, sem a devida correção da anisotropia o mapa obtido pode ser um mapa equivocado, daí a importância da modelagem da anisotropia levando em consideração a distribuição espacial do fenômeno de interesse, utilizando procedimentos geoestatísticos. Quando a variável estudada apresenta semivariograma diferentes para diferentes direções, diz-se que ocorreu a anisotropia.

Isotropia numa forma abrangente, diz-se da qualidade segundo a qual uma característica de interesse (para este estudo uma característica regionalizada) tem o mesmo valor ou intensidade, independente da direção que ocorre, ou seja, acontece de forma homogênea em diferentes direções. Já a anisotropia acontece quando a característica de interesse varia conforme se modifica a direção em que ocorre o fenômeno.

De acordo com Deutsch e Journel (1992), existem várias formas de detectar a anisotropia, uma delas se dá pelo cálculo de semivariogramas experimentais direcionais (usualmente  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ ), onde realiza - se uma inspeção visual avaliando suas similaridades para as diferentes direções adotadas. Outra forma, segundo Vicente (2004), acontece por meio do esboço gráfico de uma elipse (conhecido também como diagrama da rosa), calculada através dos alcances obtidos em direções distintas.

A forma mais eficiente e direta de detectar a anisotropia é por meio do semivariograma, que é um gráfico  $2D$ , no qual obtém-se uma visão geral da variabilidade espacial da variável em estudo. Além disso, sobre o semivariograma é possível detectar rapidamente os eixos de anisotropia, isto é, as direções de maior e menor continuidade espacial da variável que está sendo analisada.

Geralmente ocorre que semivariogramas determinados ao longo de diferentes direções da área em estudo podem indicar variações diferentes para a mesma variável, caso típico de anisotropia, que por sua vez pode ser classificada nas anisotropias *Geométrica*, *Zonal* e *Combinada*. A Figura 6 apresenta visualmente estas diferenças e para exemplificar utiliza-se, nas direções  $x$  e  $y$  (para esta seção), o acréscimo do asterisco (\*) indicando as diferentes direções o comportamento que a variável de interesse pode assumir. Os outros parâmetros, patamar ( $C$ ) e alcance ( $a$ ) associados ao semivariograma são utilizados como anteriormente.

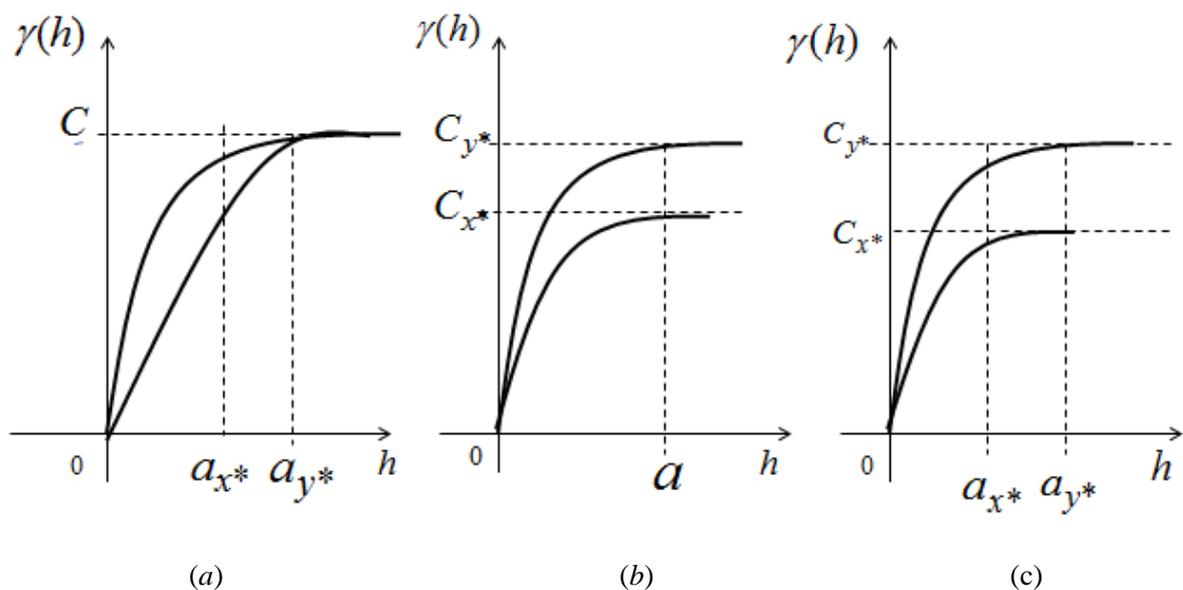
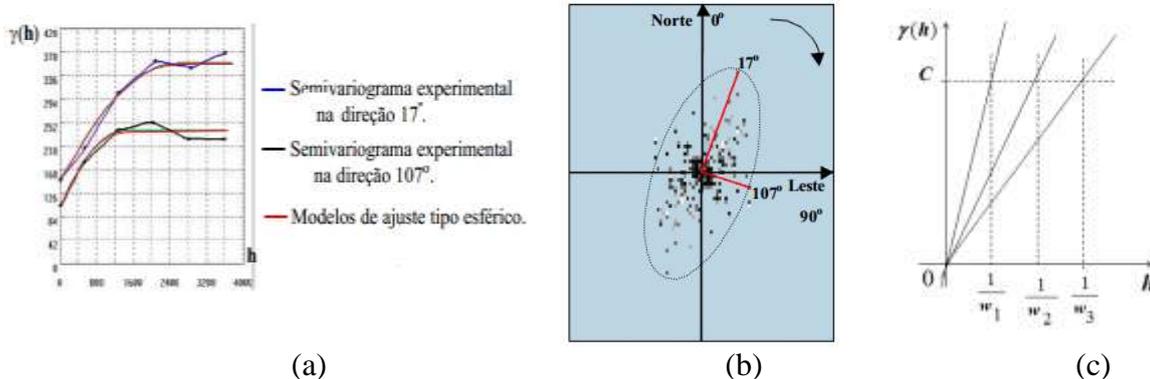


Figura 6 - Semivariogramas anisotrópicos com as anisotropias Geométrica(a), Zonal(b) e Combinada (c).

Na anisotropia *geométrica* (Figura 6(a)) o alcance varia conforme as direções, mas sob um patamar constante. Para a anisotropia *zonal* (Figura 6(b)) o alcance permanece constante e o patamar varia de acordo com as direções  $x^*$  e  $y^*$  (30°, 45°, 60°, 135°, etc) analisadas. Por fim, na anisotropia *combinada* (Figura 6(c)) variam tanto o alcance quanto o patamar, ou seja, quando para diferentes direções resultam em diferentes semivariogramas caracteriza-se um dos tipos de anisotropia citadas anteriormente.

Andriotti (2003) mostra que para identificar a anisotropia geométrica tomadas duas direções quaisquer, designadas por 1 e 2, seus alcances  $a_1$  e  $a_2$  são relacionados por  $\lambda = \frac{a_1}{a_2}$ ; em que  $\lambda$  representa o fator de isotropia ou anisotropia geométrica, sendo  $\lambda = 1$  o caso particular de isotropia e  $\lambda \neq 1$  (maior ou menor que 1) representa anisotropia geométrica.

Outra sugestão apresentada pelo autor para o caso de esquemas com patamar é plotar a rosa dos alcances, obtendo-se uma elipse (anisotropia) ou um círculo (isotropia) ou plotar em um mesmo gráfico os semivariogramas para as direções estudadas e para os esquemas sem patamar, plotam-se os inversos das inclinações à origem como mostrado nos esquemas da Figura 7(a) e 7(b) (CAMARGO; FELGUEIRAS; MONTEIRO, 2001) e 7(c):



Fonte: Adaptado de CAMARGO, FELGUEIRAS, MONTEIRO, 2001.

Figura 7 - Tipos de gráficos representativos da Anisotropia Geométrica. (a) Semivariograma anisotrópico nas direções de 17° e 107°, (b) Semivariograma para as direções de 17° e 107° utilizando a elipse do diagrama da rosa. (c) Semivariograma de modelo sem patamar para mais de uma direção em que  $w_1, w_2, w_3$  representam as inclinações nas direções 1, 2 e 3.

Após elaborar os modelos para ambas direções em um mesmo gráfico, o próximo passo é combiná-los num único modelo consistente para todas as direções, segundo a técnica descrita por Almeida e Bettini (1994). Para isto, procedimentos de transformações vetoriais algébricas e analíticas são necessários e seus fundamentos serão apresentados a seguir.

### 2.3.1 Vetores e pontos

Boldrini et al. (1980) define o conceito de Plano onde os vetores são, inicialmente restringidos, a fim de introduzir o conceito de vetor. Para isto, é caracterizado o plano cartesiano. Segundo os autores, Plano Cartesiano consiste de um sistema de coordenadas dado por um par de retas ortogonais, com orientação (Figura 8). Fixada uma unidade de comprimento, um ponto  $P$  do plano pode ser identificado com o par  $(a, b)$  de números reais que são suas coordenadas.

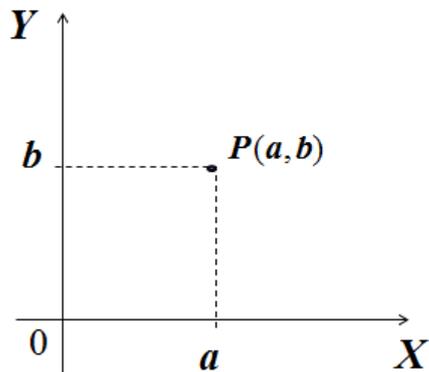


Figura 8 - Plano cartesiano

Camargo e Boulos (2005) apresentam o conceito formal de vetor como classe de equipolência de segmentos orientados e as definições, nomenclaturas e propriedades básicas pertinentes.

De acordo com os autores, existem grandezas, chamadas escalares, que são caracterizadas por um número (e a unidade correspondente):  $50 \text{ dm}^2$  de área,  $4\text{m}$  de comprimento,  $7 \text{ kg}$  de massa. Outras, no entanto, requerem mais do que isso. Por exemplo, para caracterizarmos uma força ou uma velocidade, precisamos identificar a direção, a intensidade (módulo) e o sentido. Grandezas que exigem estas três caracterizações, são chamadas *Grandezas vetoriais*.

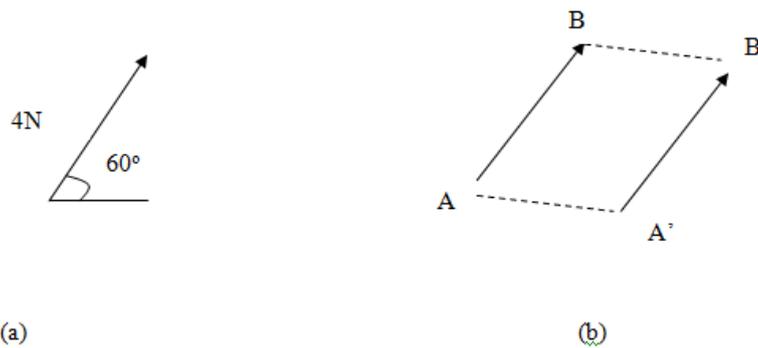


Figura 9 - Representação de um vetor (a) Vetor força aplicado em um ângulo, e (b) representação por meio de flechas de mesmo comprimento, direção e sentido.

Na Figura 9b adotou a seguinte premissa: duas flechas de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido caracterizam a mesma grandeza vetorial.

De forma mais aplicada Camargo e Boulos (2005) apresentam o conceito formal de vetor e para caracterizá-lo, partem do conceito de segmento orientado, e apresentam formalmente os vetores, partindo de cinco proposições que alegam necessárias para a objetividade e clareza da exposição. A seguir estão apresentadas as proposições. Um **segmento orientado** definido pelos pontos A e B é um par ordenado (A,B) de pontos do espaço. A é a **origem** e B é a **extremidade** do segmento orientado (A,B). Um segmento orientado do tipo (A, A) é chamado **segmento orientado nulo**.

Observe que, se  $A \neq B$ , então (A,B) é diferente de (B,A).

#### Definição

- a) Os segmentos orientados (A,B) e (C,D) são de **mesmo comprimento** se os segmentos geométricos AB e CD têm comprimentos iguais.
- b) Se os segmentos orientados (A,B) e (C,D) não são nulos, eles são de mesma **direção**, ou **paralelos**, se os segmentos geométricos AB e CD são paralelos (isto inclui o caso em que AB e CD são colineares).
- c) Suponhamos que (A, B) e (C,D) sejam paralelos.
  - No caso que as retas AB e CD são distintas, os segmentos orientados (A,B) e (C,D) são de mesmo sentido se os segmentos geométricos AC e BD têm intersecção vazia. Caso exista intersecção, (A',B') e (C',D') são segmentos orientados de sentido contrário (figura 10(a) e (b)).
  - No caso em que as retas AB e CD coincidem, tomemos (E,F) tal que E não pertença a reta AB, e (E,F) e (A,B) sejam de mesmo sentido, de acordo com o critério anterior (Figura 11). Então, os segmentos orientados (A,B) e (C,D) são de mesmo sentido se (E,F) e (C,D) são de **mesmo sentido**. Caso não seja, (A',B') e (C',D') são de **sentido contrário**.

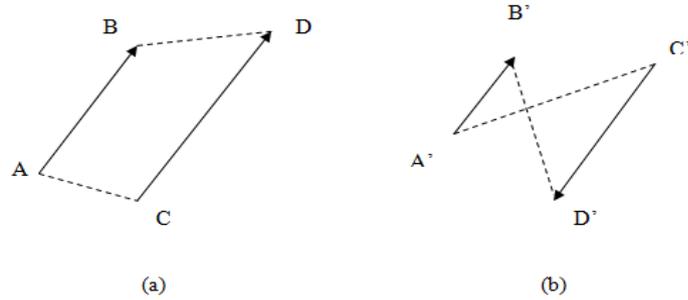


Figura 10 - Representação do sentido de um vetor, (a) por meio de segmentos orientados de mesmo sentido e (b) segmentos orientados de sentido contrário.

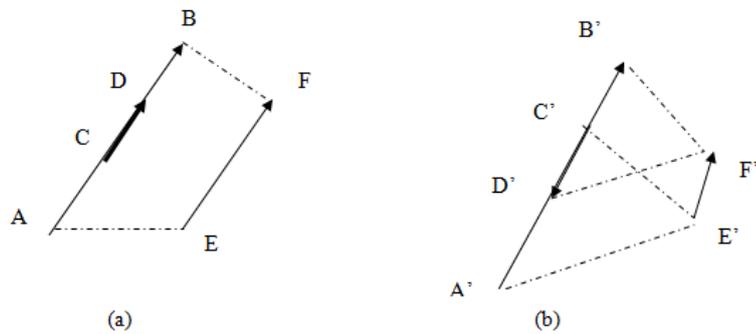


Figura 11 - Segmento orientado que define o sentido de um vetor. (a) Segmentos orientados (A,B), e (C,D) de mesmo sentido e (b) Segmentos orientados (A',B') e (C',D') de sentido contrário.

Partindo da noção de par ordenado que determina um segmento orientado Camargos e Boulos (2005) define o segmento orientado  $(A,B)$ , como uma classe de equivalência de  $(A,B)$ . Para os autores, vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a  $(A,B)$ . O segmento orientado  $(A,B)$  é chamado representante da classe de vetor.

De acordo com Camargos e Boulos (2005) um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se  $(A,B)$  é um segmento orientado, o vetor que tem representante  $(A,B)$  é indicado por  $\overrightarrow{AB}$ . Quando não se quer destacar nenhum representante especial, usam-se letras minúsculas com uma seta ( $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \vec{b}, \text{etc}$ ). O conjunto de todos os vetores será indicado por  $V^3$ .

Boldrini et al. (1980) parte da definição de dois pontos P e Q do plano e a partir destes dois pontos o segmento orientado PQ, com ponto inicial P e ponto final

Q. Daí, estabelece – se a distinção entre os segmentos orientados PQ e QP, justificando que embora os conjuntos de pontos sejam iguais, os segmentos orientados PQ e QP são opostos. Deste modo, dois segmentos orientados são equipolentes se tiverem o mesmo comprimento e direção (Figura 12).

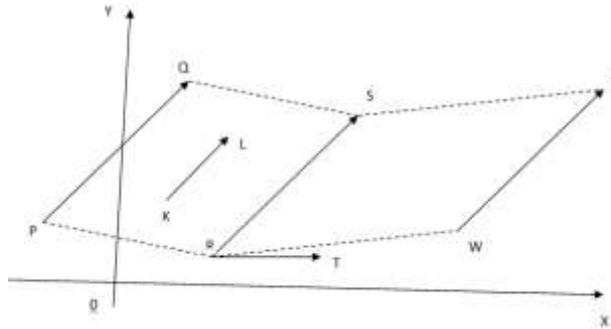


Figura 12 - Segmentos de reta orientados.

Na Figura 12,  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{KL}$  e  $\overrightarrow{RS}$  tem a mesma direção;  $\overrightarrow{RT}$  e  $\overrightarrow{KL}$  têm o mesmo comprimento;  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{RS}$  e  $\overrightarrow{ZW}$  têm o mesmo comprimento, mas os únicos segmentos com orientações equipolentes são  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{RS}$ . Para qualquer segmento orientado no plano existe outro equivalente a este cujo ponto inicial é a origem (Figura 13).

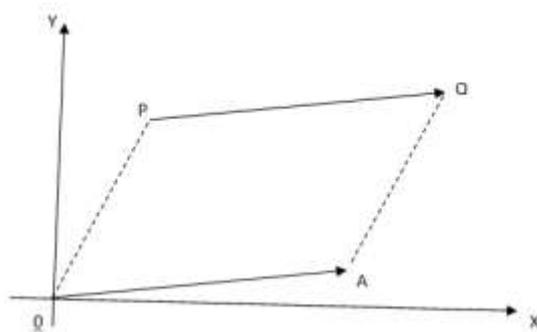


Figura 13 - Segmentos de reta orientados a partir da origem.

De acordo com Boldrini et al. (1980) os segmentos orientados com ponto inicial na origem, são denominados *vetores no plano*. Os autores destacam que vetores no plano são determinados exclusivamente pelo seu ponto final, pois o ponto inicial é fixo na origem. Deste modo, para cada ponto do plano com coordenadas a e b,  $P(a,b)$

está associado um único vetor  $v = \overrightarrow{OP}$  e, reciprocamente, dado um vetor, associamos um único ponto do plano, que é o seu ponto final. Isto é, a correspondência entre pontos do plano e vetores é biunívoca (BOLDRINI et al., 1980).

A definição de vetores de acordo com Camargos e Boulos (2005) e Boldrini et al. (1980) converge para a idéia de que um vetor é determinado pelo seu comprimento ( módulo), direção e sentido. Sendo necessário as três características em conjunto para sua representação.

Da definição de vetores surgem as operações de vetores no plano e no espaço e suas propriedades, bem como estudo dos espaços vetoriais e podem ser melhor compreendidos em (BOLDRINI et al., 2008; CAMARGOS, BOULOS, 2005).

De acordo com Boldrini et al. (1980) funções lineares descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis e ressaltam a vasta utilização de vetores nas mais diversas áreas do conhecimento. Exemplos de aplicação de vetores em funções lineares e não lineares nestes campo científico da Estatística Aplicada podem ser encontrados em Lay (2011).

Um vetor pode ser representado algebricamente por meio de uma matriz em que se aplica um operador matricial para resolução de um problema. A seguir apresenta-se a definição de representação matricial de vetor canônico ou matriz canônica.

Boldrini et al. (1980) ressalta que uma matriz canônica é a forma mais simples de representar uma matriz por meio de vetores canônicos, ou seja, paralelos aos eixos coordenados  $(x,y,z)$  que, por exemplificação, podem ser representados por  $\vec{i}(1,0,0)$ ,  $\vec{j}(0,1,0)$  e  $\vec{k}(0,0,1)$ , que irão compor uma matriz representativa do espaço  $\mathbb{R}^3$  ou ainda  $\vec{i}(1,0)$  e  $\vec{j}(0,1)$  que irão compor uma matriz representativa do espaço  $\mathbb{R}^2$  e podem ser escritos na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Se uma transformação  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o operador matricial cuja matriz canônica é

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

então

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}.$$

Existem duas interpretações geométricas igualmente boas desta equação, uma por meio de representação de componentes de vetores (flechas) e outra com a representação de coordenadas de pontos. Pode-se perceber que as entradas das matrizes para ambas as representações são as mesmas.

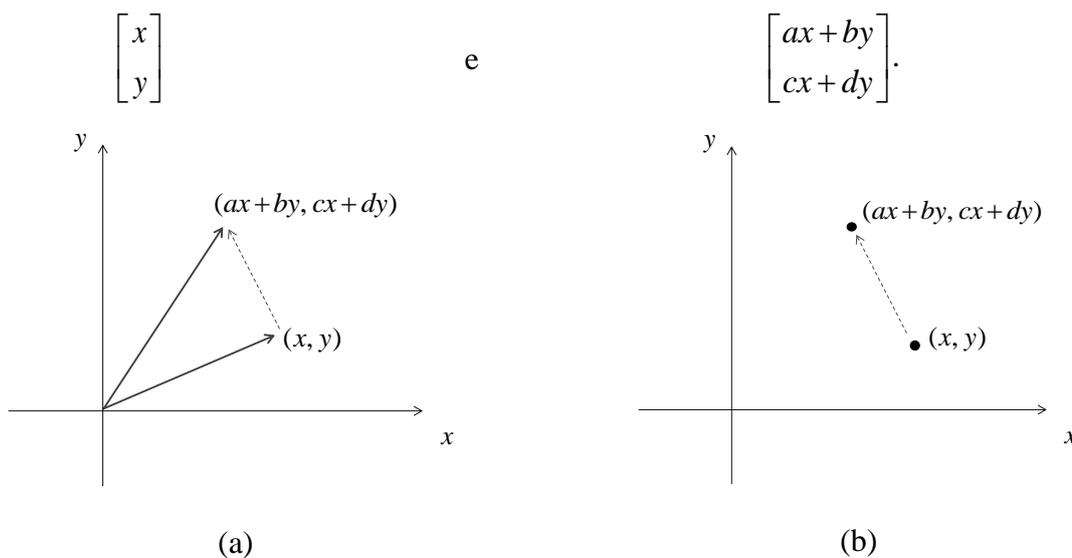


Figura 14 - Representação gráfica em que T leva vetores em vetores (a) e ponto em ponto (b).

Com a primeira interpretação,  $T$  leva vetores em vetores (Figura 14a) e como a segunda,  $T$  leva pontos em pontos (Figura 14b). A escolha é uma questão de preferência ou de necessidade, conforme sugere Anton e Rorres (2001).

### 2.3.2 Fundamentos das transformações algébricas e analíticas utilizadas para a correção da anisotropia

Shilov (1977), Curtis (1996) e Lima (2006), ressaltam que uma transformação linear leva vetores em vetores. Fixando um sistema de coordenadas no plano, os vetores ficarão determinados por suas coordenadas e as transformações lineares serão definidas em  $\mathbb{R}^2$ , com valores em  $\mathbb{R}^2$ .

Transformação é sinônimo de função. Uma transformação  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  faz corresponder a cada vetor  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  um vetor  $Tv = T(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , chamado imagem (ou o transformado) de  $v$  por  $T$ .

Assim, as coordenadas de  $Tv$  são números que dependem das coordenadas  $(x, y)$  de  $v$ , portanto,  $Tv = T(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ . Deste modo, fazer uma transformação  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o mesmo que gerar duas funções  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com valores numéricos chamados as *funções-coordenadas de T*. As ideias desenvolvidas aqui têm importante aplicação na área de computação gráfica utilizada no ajuste da correção de anisotropia.

Atendendo os propósitos de apresentar as demonstrações algébricas e analíticas que envolvem as transformações feitas para a correção da anisotropia, apresenta-se neste trabalho apenas as demonstrações de rotação, expansões e compressões de figuras.

### 2.3.3 Expansões e compressões

De acordo com Anton e Rorres (2001), se a coordenada  $x$  de cada ponto no plano é multiplicada por uma constante positiva  $k$ , então o efeito é expandir ou comprimir a figura plana na direção  $x$ . Se  $0 < k < 1$ , o resultado é uma compressão e se  $k > 1$  o resultado é uma expansão, representados graficamente na Figura 15b e 15c, respectivamente. Analogamente, pode-se obter compressão ou expansão de qualquer figura em relação ao eixo  $y$ , por meio de multiplicação da ordenada  $y$  por uma constante  $k$  positiva, assim se  $0 < k < 1$  obtém-se a compressão e se  $k > 1$  obtém-se a expansão da figura em relação aquele eixo.

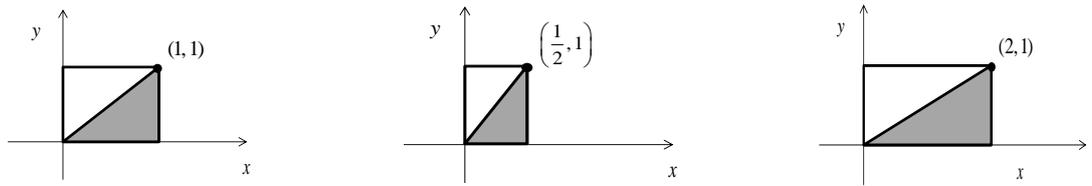


Figura 15 - Representação gráfica do quadrado unitário (a), compressão (b) e da expansão (c), com  $k$  igual a um,  $1/2$  e  $2$ , respectivamente.

Se  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma expansão ou compressão de fator  $k$  na direção  $x$ , então:

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De tal modo que a matriz canônica de  $T$  na direção  $x$  e por analogia, a matriz canônica da expansão ou compressão na direção  $y$  são dadas, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz canônica ( $L$ ) da composta da operação em  $x$  seguida pela operação em  $y$  quando se pretende transformar  $x$  e  $y$  é

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Logo, pode-se mostrar que multiplicando uma matriz diagonal dois×dois expande ou comprime o plano na direção  $x$  e também na direção  $y$  (ANTON, RORRES, 2001).

Para fins de exemplificação, pode-se considerar um vetor representado pelos pontos  $O(1,2)$  e  $P(0,3)$  fazendo a transformação por compressão para uma constante  $k=1/2$  e representando geometricamente os resultados. Assim, para este exemplo,  $\overrightarrow{OP} = (-1,1)$ , então:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Cuja representação gráfica é apresentada na Figura 16.

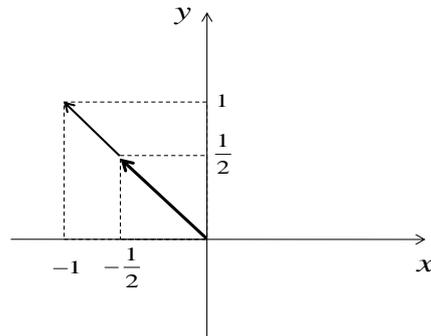


Figura 16 - Representação gráfica do exemplo com os pontos O (1, 2) e P(0, 3) fazendo a transformação por compressão para  $k=1/2$ .

Observa-se que com a compressão a dimensão do vetor (módulo) foi reduzida enquanto seu sentido foi mantido porque  $0 < k < 1$ .

### 2.3.4 Rotação em torno da origem

Pode-se definir analiticamente rotação como uma transformação no sistema de coordenadas, ou seja, um tipo de isomeria que na teoria matemática refere-se a um tipo de transformação.

Lima (2006) ressalta que em duas dimensões, uma rotação em sentido anti-horário de um plano sobre a origem, onde  $(x, y)$  é mapeado para  $(x', y')$ , é dada pelas mesmas fórmulas como uma transformação de eixos de coordenadas com uma rotação horária, resultando uma mudança de coordenadas  $(x, y)$  em  $(x', y')$ . Deste modo, fixado um ângulo  $\theta$ , a rotação  $R = R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  faz corresponder a cada  $v = (x, y)$  o vetor  $Rv = (x', y')$ , de mesmo comprimento que  $v$ , tal que o ângulo de  $v$  para  $Rv$  é  $\theta$ . A fim de obter as equações que exprimem  $x'$  e  $y'$  em termos de  $x$  e  $y$ , isto é, as funções-coordenadas de  $R$ , pode se observar que se  $\alpha$  é o ângulo formado com o eixo  $x$  e  $v$  então  $x = |v| \cos \alpha$ ,  $y = |v| \sin \alpha$ . Por sua vez, o ângulo do eixo  $x$  com  $Rv$  (rotação de  $v$ ) é  $\theta + \alpha$ .

Como o comprimento de  $Rv$  também é  $|v|$ , tem-se que

$$y' = |v| \operatorname{sen}(\alpha + \theta)$$

$$x' = |v| \operatorname{cos}(\alpha + \theta)$$

a Figura 17 apresenta graficamente o exposto.

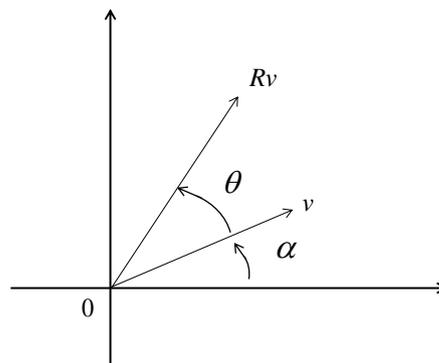


Figura 17 - Representação gráfica para o exemplo com os pontos A(1,2) e B(0,3) fazendo a transformação por compressão para  $k = 1/2$ .

Utilizando as fórmulas obtidas pelas identidades trigonométricas básicas e de acordo com Gentil et al. (1998)

$$\operatorname{cos}(\alpha + \theta) = \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \theta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \theta) = \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \theta$$

obtém-se para  $x'$  e  $y'$  as expressões dadas por

$$x' = |v| \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \theta - |v| \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \theta \quad (2)$$

$$y' = |v| \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \theta + |v| \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \theta \quad (3)$$

Portanto, a rotação  $R$  de ângulo  $\theta$  em torno da origem leva o vetor  $v = (x, y)$  no vetor  $Rv = (x', y')$ . Pode-se verificar que

$$x = |v| \cos \alpha \quad (4)$$

e

$$y = |v| \sin \alpha \quad (5)$$

então substituindo (4) e (5) nas respectivas equações (2) e (3), pode-se concluir que as equações da transformação por rotação de  $v = (x, y)$  no vetor  $Rv = (x', y')$  é dado por

$$x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta \quad (6)$$

e

$$y' = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta. \quad (7)$$

Em particular, a rotação de  $90^\circ$  no sentido positivo leva o vetor  $v = (x, y)$  no vetor  $Rv = (x', y')$  com  $x' = x \cdot \cos 90^\circ - y \cdot \sin 90^\circ = -y$  e  $y' = x \cdot \sin 90^\circ + y \cdot \cos 90^\circ = x$ , portanto  $Rv = (-y, x)$ .

As equações (6) e (7) da transformação por rotação das coordenadas  $x$  e  $y$  podem ser expressas na forma matricial, da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Convém notar também que  $v$  se obtém de  $Rv$  por uma rotação de ângulo  $(-\theta)$ . Como  $\cos(-\theta) = \cos \theta$  e  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ , resulta que  $x = x' \cdot \cos \theta + y' \cdot \sin \theta$  e  $y = -x' \cdot \sin \theta + y' \cdot \cos \theta$ , que por sua vez pode ser expressa na forma matricial por meio da equação

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

permitindo observar que a matriz de rotação muda de sinal, conforme a rotação do ângulo.

Segundo Guedes et al. (2008), a correção da anisotropia e o ajuste de um modelo teórico para o semivariograma omnidirecional corrigido, trazem vantagens econômicas, uma vez que permitem a obtenção de melhor *acurácia* dos mapas de variabilidade espacial, podendo-se

planejar de forma satisfatória a malha amostral para posteriores estudos da variabilidade espacial na mesma área.

Todo o processo de correção da anisotropia depende da compreensão do conceito de alcance teórico e alcance prático. Pois as manipulações algébricas feitas pelos softwares para correção da anisotropia se baseiam no valor do alcance teórico, valor este que em muitos dos softwares os usuários não conhecem por não aparecerem na tela do computador.

### 2.3.5 Relação existente entre correção da anisotropia as transformações vetoriais e geométricas envolvidas

De acordo com Diggle e Ribeiro Junior (2007), o caso da anisotropia geométrica, por exemplo, pode ser corrigida por transformações lineares, nas quais são usados procedimentos de dilatação e rotação das coordenadas espaciais, como exposto nas seções (2.4.3) e (2.4.4), baseadas em propriedades angulares das retas que tangenciam as curvas dos semivariogramas anisotrópicos, representadas em um mesmo gráfico e pode ser visualizada por meio da Figura 18.

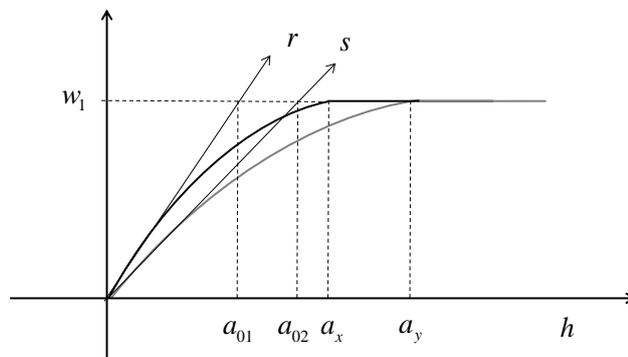


Figura 18 - Gráfico representativo das retas tangentes definidas por  $C_{(0)} = 0$  e  $C_{(a_0)} = \gamma$  que definem o ângulo de anisotropia geométrica.

Observe que na Figura 18, podem ser traçadas duas retas,  $r$  e  $s$  as quais tangenciam as curvas nas direções analisadas ( $0^\circ$  e  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $135^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$ , ou quaisquer dois pares de ângulos complementares) direções que serão descritas por  $x^*$  e  $y$ .

Transferindo a Figura 18 para um tratamento analítico, pode-se dispor de um gráfico em que as direções de anisotropia estão indicadas por  $x^*$  e  $y^*$ , como apresentado na Figura 19.

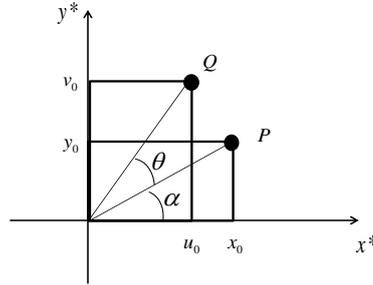


Figura 19 - Gráfico representativo dos eixos e ângulos de anisotropia.

Da Figura 19 decorre que o ângulo de anisotropia que deve ser corrigido é dado por:  $\phi = \alpha + \theta$ . Utilizando a notação matricial apresentada na equação (8), dada por

$$h' = (x, y) \cdot M_R \cdot M_D \quad (8)$$

onde,  $h'$  representa a transformação de  $h$ . A matriz de rotação ( $M_R$ ) e a matriz de dilatação ( $M_D$ ) são dadas, respectivamente, por

$$M_R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad M_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_a} \end{bmatrix}$$

Os parâmetros, fator de anisotropia ( $F_a$ ) e o ângulo da direção de maior continuidade representa a diferença entre o maior e o menor ângulo ( $\theta$ ) em relação a origem e podem ser calculados considerando  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Em que para  $F_a = \frac{a_{y^*}}{a_{x^*}}$  representa o fator de anisotropia e  $a_{y^*}$  e  $a_{x^*}$  são, respectivamente, os alcances nas direções de maior e menor continuidade espacial.

Como já apresentado anteriormente, (Seção 2.2.2.), a definição do alcance teórico ( $a_0$ ) por meio da reta tangente a curva do modelo, implica na obtenção de um segundo par ordenado para o modelo ( $a_0, C$ ), com o ponto  $(0, C_0)$ , tem-se então dois pontos com os quais

podemos determinar uma reta (*postulado euclidiano*) tangente  $r$  que fornecerá o ângulo de inclinação da curva do semivariograma na direção  $x^*$ , como apresentado na Figura 18.

Utilizando procedimento similar pode ser encontrada a reta tangente  $s$  da direção anisotrópica  $y^*$  onde é obtido, deste modo, o ângulo de anisotropia ( $\theta$ ). A partir dos conhecimentos da equação matricial de rotação angular no sentido horário, apresentada em 2.4.4, obtêm-se então, a correção de  $h$ , para a anisotropia geométrica.

Isaaks e Srivastava (1989) mostram que a anisotropia zonal pode ser modelada por meio de um semivariograma direcional equivalente com a distância reduzida, considerando como patamar o maior valor de patamar apresentado entre os semivariogramas direcionais construídos.

Pode-se observar que ao corrigir  $h$ , o valor de alcance, conseqüentemente será menor que aquele correspondente à direção de maior continuidade e maior que o alcance correspondente a direção de menor continuidade e permite com isso, definir um alcance lógico e matematicamente mais preciso para  $h$ , favorecendo a clareza e adequação dos mapas.

A correção sugerida por Isaaks e Srivastava (1989) condiz com os conhecimentos sobre translação de eixos (Seção 2.4.3.).

Adotando-se desta forma, o modelo de semivariograma corrigido descrito pela equação

$$\gamma'(h) = w \cdot \gamma(h')$$

onde,  $h' = \frac{h}{a}$ , sendo  $w$  e  $a$ , valores de patamar e alcance, respectivamente, do semivariograma na direção que apresentou a anisotropia zonal.

A anisotropia combinada, consiste em uma combinação das anisotropias geométrica e zonal, deste modo, os modelos de anisotropias geométrica e zonal, assim como os modelos de semivariograma direcionais apresentam diferentes alcances e patamares. Isaaks e Srivastava (1989) propuseram a equação (9) para o estudo da anisotropia combinada, em que a primeira

etapa consiste em modelar a anisotropia geométrica e, a segunda, em modelar a anisotropia zonal e é dada pela fórmula

$$\gamma'(h) = w_1\gamma_1(h') + w_2\gamma_2(h') \quad (9)$$

onde

$$h' = \sqrt{\left(\frac{h_{x^*}}{a_{x^*}}\right)^2 + \left(\frac{h_{y^*}}{a_{y^*}}\right)^2}.$$

Na equação (9),  $w_1$  representa o patamar do semivariograma direcional que apresentou maior alcance, e  $w_2$  o que apresentou menor alcance, entre os semivariogramas direcionais. E para a segunda expressão,  $h_{x^*}$  representa a projeção de  $h$  na direção  $x^*$ ,  $h_{y^*}$  é a projeção de  $h$  na direção  $y^*$ ,  $a_{x^*}$  alcance na direção  $x^*$ ,  $a_{y^*}$  representa o alcance na direção  $y^*$  e  $h'$  é o alcance corrigido e padronizado.

Como visto, a correção da anisotropia permite encontrar um modelo de semivariograma com menor distorção nos valores dos parâmetros por reduzir o *leg* (distância  $h$  entre os pontos).

Do ponto de vista matemático, a correção da anisotropia é necessária para garantia da positividade definida condicional para a matriz de semivariâncias, a qual inclui o *Multiplicador de Lagrange* e utilizada no cálculo dos pesos de krigagem dos pontos. Esta tem como condição ser uma matriz simétrica ao redor de zero ou do pepita. Ou seja, a matriz de semivariâncias que compõem o sistema de krigagem é simétrica e diagonal superior.

## 2.4 Forma quadrática positiva definida

Para compreensão de formas quadráticas, Boldrini et al. (1980) parte da definição de formas lineares e formas bilineares para a partir daí definir uma forma quadrática.

De acordo com Lay (2011) expressões mais gerais, chamadas formas quadráticas, ocorrem com frequência em aplicações da álgebra linear à engenharia (em critérios para projetos de otimização) e em processamento de sinais (como potência de ruído de saída). Elas também ocorrem em física (como energias potencial e cinética), em geometria diferencial (como curvatura normal de superfícies), em economia (como funções utilidade) e em estatística (em elipsóide de segurança). Uma base matemática para tais aplicações segue com matrizes simétricas (que será definida posteriormente).

Boldrini et al. (1980) inicia o conceito de formas lineares utilizando o seguinte exemplo: Suponha que uma pessoa necessite comprar ferro, chumbo e cobre a cinco, seis e quatro reais o quilo, respectivamente. Se esta pessoa compra  $x$  quilos de ferro,  $y$  quilos de chumbo e  $z$  quilos de cobre, podemos representar esta compra pelo vetor cujas coordenadas são  $(x,y,z)$  e o custo total é dado pela expressão  $5x+6y+4z$ .

Observe que a “função custo”

$$c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \rightarrow 5x + 6y + 4z$$

é uma transformação linear cujo contradomínio é um espaço vetorial muito particular, pois é o conjunto dos números reais. Transformações lineares desse tipo recebem o nome de *forma linear*.

Boldrini et al. (1980) define: Seja  $V$  um espaço vetorial real. Uma forma linear é uma transformação linear  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemplo:**

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \rightarrow 2x + y - z$$

ou na forma matricial  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow [2 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ .

Para definição de formas bilineares, Boldrini et al. (1980) considera funções associadas a espaços vetoriais, que se comportam mais ou menos como produtos internos ( produto de um vetor por seu transposto que resulta num escalar, chamado também produto escalar), isto

é, funções que a cada par de vetores associam um número de tal forma que uma vez fixado o primeiro vetor, a função seja uma forma linear em relação ao segundo vetor, e vice-versa. Funções deste tipo podem ser operadas por meio de produtos escalares de matrizes.

Boldrini et al. (1980) define: Seja  $V$  um espaço vetorial real. Uma *forma bilinear* é uma aplicação  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  tal que:

i) Para todo  $\mathbf{w}$  fixado,  $B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  é uma forma linear em  $\mathbf{v}$ , isto é,

$$B(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$$

$$e B(\alpha \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

ii) Para todo  $\mathbf{v}$  fixado,  $B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  é uma forma linear em  $\mathbf{w}$ , isto é,

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)$$

$$e B(\alpha \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Ainda, de acordo com Boldrini et al. (1980), seja  $V$  um espaço vetorial e  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear. Dada uma base  $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$ , associamos a  $B$  uma matriz  $[B]_\alpha^\alpha$  chamada matriz da forma bilinear  $B$ , na base  $\alpha$ , do seguinte modo:

Se

$$\mathbf{v} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n,$$

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \sum_{i,j} x_i y_j B(v_i, v_j)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \dots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \dots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{v}]_\alpha^\alpha [B]_\alpha^\alpha [\mathbf{w}]_\alpha^\alpha.$$

Daí, a forma linear simétrica pode ser definida como  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  para todo  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ .

Exemplo:  $B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

Calculando  $B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ , temos

$$\begin{aligned} B(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= ((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \\ &= y_1x_1 + 3y_2x_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_2 \\ \text{como } B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= [x_1, x_2] \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Este resultado tem validade geral, podendo ser enunciado no teorema abaixo.

*Uma forma bilinear  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é simétrica se e somente se  $[B]_\alpha$  é uma matriz simétrica.*

Continuando o mesmo raciocínio para a definição de formas quadráticas, Boldrini et al. (1980) utiliza-se do seguinte exemplo: Consideremos uma partícula de massa  $m$  deslocando-se no espaço com velocidade  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . A energia cinética que esse corpo possui é dada pela expressão

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{m\|\mathbf{v}\|^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right)^2 \\ &= [v_x, v_y, v_z] \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se considerarmos agora a aplicação bilinear simétrica  $B: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cuja expressão é

$$B((v_x, v_y, v_z), (w_x, w_y, w_z)) = [v_x, v_y, v_z] \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}.$$

Observamos que  $E_c(v_x, v_y, v_z) = B((v_x, v_y, v_z), (v_x, v_y, v_z))$ .

Expressões como esta, que provém de formas bilineares simétricas, recebem o nome de *formas quadráticas*.

Definição: Seja  $V$  um espaço vetorial real e  $B:V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear simétrica. A função  $Q:V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(v) = B(v,v)$  é chamada *forma quadrática* associado a  $B$ .

De acordo com Rencher e Schaalje (1934) as formas quadráticas ( $Q(x)$ ) são classificadas da seguinte forma:

- i)  $Q(x)$  é positiva definida, se e somente se,  $Q(x) > 0, \forall x \neq \emptyset$  ( $\emptyset =$  vetor nulo);
- ii)  $Q(x)$  é positiva semidefinida, se e somente se,  $Q(x) \geq 0, \forall x$ , e existir pelo menos um  $x_0 \neq \emptyset$ , tal que  $Q(x_0) = 0$ ;
- iii)  $Q(x)$  é negativa definida, se e somente se,  $Q(x) < 0, \forall x \neq \emptyset$ ;
- iv)  $Q(x)$  é negativa semidefinida, se e somente se,  $Q(x) \leq 0, \forall x$  e existir pelo menos um  $x_0 \neq \emptyset$ , tal que  $Q(x_0) = 0$ .
- v)  $Q(x)$  é não definida se não se enquadra num dos casos acima.

Rencher e Schaalje (1934) caracterizam matrizes positivas definidas e semidefinidas de acordo com os autovalores positivos e não negativos, respectivamente e enunciam os teoremas a seguir:

Teorema 1:

Seja  $A$  uma matriz quadrática ( $n \times n$ ) com autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ .

- (i) Se  $A$  é positiva definida,  $\lambda_i > 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- (ii) Se  $A$  é positiva semi definida,  $\lambda_i \geq 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . O número de autovalores  $\lambda_i$  para  $\lambda_i > 0$  é a classificação da matriz  $A$ .

**Prova:**

Para qualquer  $\lambda_i$  tem-se  $Ax_i = \lambda_i x_i$ . Multiplicando por  $x_i'$ , obtém-se

$$x_i'Ax_i = \lambda_i x_i'x_i,$$

$$\lambda_i = \frac{x_i'Ax_i}{x_i'x_i} > 0.$$

Na segunda expressão,  $x_i'Ax_i$  é positiva porque  $A$  é positiva definida, e  $x_i'x_i$  é positiva porque  $x_i \neq 0$ .

Se uma matriz  $A$  é positiva definida, pode-se encontrar a raiz quadrada da matriz,  $A^{1/2}$ , da seguinte forma:

Desde que os autovalores de  $A$  são positivos, pode-se substituir a raiz quadrada,  $\sqrt{\lambda_i}$ , por  $\lambda_i$ , na decomposição espectral de  $A$ , para obter  $A^{1/2} = CD^{1/2}C'$ . Onde,  $D^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ . A matriz  $A^{1/2}$  é simétrica e idempotente:

$$A^{1/2} A^{1/2} = (A^{1/2})^2 = A.$$

Muitas das somas de quadrado na regressão e análise de variância podem ser expressas por uma forma quadrática  $y'Ay$ .

Teorema 2:

A única matriz não singular idempotente é a matriz identidade  $I$ .

**Prova:**

Se  $A$  é idempotente e não singular, então  $A^2=A$  e a inversa  $A^{-1}$  existe. Multiplicando a equação  $A^2=A$  por  $A^{-1}$ , obtém-se,

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}a$$

$$A=I.$$

Teorema 3:

Se  $A$  é uma matriz singular, simétrica e idempotente, então  $A$  é positiva semidefinida.

**Prova:**

Seja  $A = A'$  e  $A = A^2$ , então, tem-se  $A = A^2 = A.A = A'A$

que é positiva semidefinida pelo teorema\* enunciado a seguir.

\* *Seja  $B$  uma matriz  $n \times p$*

*Se o posto  $(B) = p$ , então  $B'B$  é positiva definida;*

*Se o posto  $(B) < p$ , então  $B'B$  é positiva semidefinida.*

Veja que  $y'B'By > 0$  for  $y \neq 0$ , nota-se que  $y'B'By = (By)'(By)$ , que é a soma de quadrados e é assim, positiva, a menos que  $By = 0$ . Portanto,  $By$  pode ser expressa na forma  $By = y_1b_1 + y_2b_2 + \dots + y_pb_p$ .

Pois, se  $B$  é substituído por um vetor  $b$  particionado em dois conjuntos de elementos, e se  $B$  é correspondentemente particionado em dois conjuntos de colunas, de acordo com a multiplicação de matrizes, então,

$$Bb = (B_1, B_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = B_1b_1 + B_2b_2 ,$$

onde o número de colunas de  $B_1$  é igual ao número de elementos de  $b_1$ , e similarmente em  $B_2$  e  $b_2$ . Observa-se que o particionamento em  $B = (B_1, B_2)$  é indicado por uma vírgula. A multiplicação particionada acima, pode ser estendida para colunas individuais de uma matriz  $A$  e elementos individuais de um vetor  $\mathbf{b}$ . Assim, tem-se,

$$A\mathbf{b} = (a_1, a_2, \dots, a_p) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_p b_p$$

Uma vez que as colunas de  $B$  são linearmente dependentes, então,  $y'B'y \geq 0$ .

Observa-se que se  $B$  é uma matriz quadrada, a matriz  $B'B = B^2$  não é necessariamente uma matriz positiva semidefinida. Por exemplo, seja  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , então,

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B'B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Neste caso,  $B^2$  não é positiva semidefinida, mas  $B'B$  é positiva semidefinida, portanto,

$$y'B'y = 2(y_1 - 2y_2)^2$$

Se  $a$  for um número real  $A^2 = A$ , então  $A$  é 0 ou 1. De forma análoga, em propriedades de matrizes, se  $A^2 = A$ , então os autovalores de  $A$  são 0 e 1. Isto prova o teorema 3.

Teorema 4:

Se  $A$  é uma matriz  $(n \times n)$ , simétrica, idempotente de rank  $r$ , então,  $A$  tem  $r$  autovalores iguais a 1 e  $n-r$  autovalores iguais a 0.

**Prova:**

Por  $A^2x = \lambda Ax = \lambda(\lambda x) = \lambda^2x$ , em que  $\lambda^2$  é um autovalor de  $A^2$ , e  $x$  é o autovetor correspondente de  $A^2$ . Isto pode ser estendido para qualquer poder de  $A$ :  $A^kx = \lambda^kx$

Em que  $\lambda^k$  é um autovalor de  $A^k$ , e  $x$  é o autovetor correspondente. Se  $Ax = \lambda x$ , então  $A^2x = \lambda^2x$ . Desde que  $A^2=A$ , tem-se  $A^2x = Ax = \lambda x$ .

Igualando as equações  $A^2x = \lambda^2x$  e  $A^2x = Ax = \lambda x$ , tem-se

$$\lambda x = \lambda^2x \text{ ou } (\lambda - \lambda^2)x = 0.$$

Mas  $x \neq 0$ , então,  $\lambda - \lambda^2 = 0$ , portanto,  $\lambda$  é 0 ou 1. Deste modo, pelo teorema 3,  $A$  é positiva definida, e portanto, pelo teorema 1 (ii), o número de autovalores não nulos é igual ao  $\text{rank}(A)$ . Deste modo,  $r$  autovalores de  $A$  são iguais a 1 e  $n - r$  autovalores de  $A$  são iguais a zero.

#### **2.4.1 Representação de autovalores e autovetores e sua relação com vetor de probabilidade**

De acordo com Boldrini et al. (1980) dada uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo,  $T:V \rightarrow V$  quando queremos saber que vetores seriam levados neles mesmos por esta transformação. Isto é, dada  $T:V \rightarrow V$ , quais são os vetores  $v \in V$  tais que  $T(v)=v$ ? ( $v$  é chamado vetor fixo). Exemplos sobre transformações lineares por reflexão, identidade, cisalhamento, rotação e homotetias são encontrados em Boldrini et al. (1980), Lay (2011) e Loreto et al. (2011).

Lay (2011) apresenta uma justificativa plausível a necessidade de identificar se uma matriz possui autovalores e autovetores considerando que apesar de uma transformação  $X \rightarrow MX$  deslocar vetores em muitas direções, muitas vezes existem vetores especiais para os quais a ação de  $A$  é muito simples. Para isso, considere:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As imagens de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  na multiplicação por  $M$  são mostradas na Figura 20. De fato,  $M\mathbf{v}$  é simplesmente  $2\mathbf{v}$ . Assim,  $M$  apenas “estica”, ou dilata  $\mathbf{v}$ .

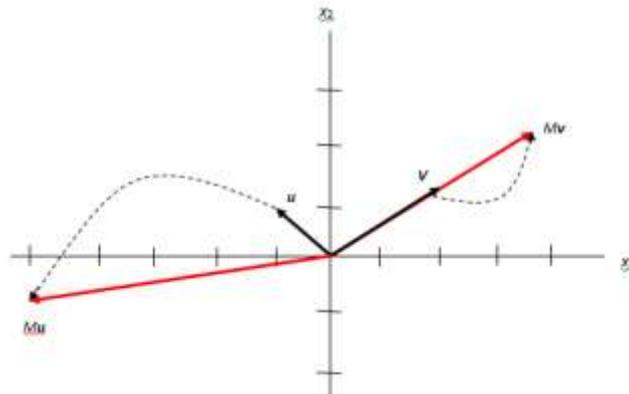


Figura 20 - Efeito da multiplicação por  $M$ .

Lay (2011) apresenta outro exemplo na seção 4.9 de sua obra, em que relaciona uma matriz estocástica  $A$  e o vetor estacionário  $\mathbf{q}$  para que satisfaça a equação  $A\mathbf{q} = 1\mathbf{q}$ . Seguindo as instruções de Lay (2011) considere  $A=M$  e  $\mathbf{q} = \mathbf{x}$ , ao procurar os autovalores e autovetores estamos procurando pelos vetores que são transformados por  $M$  em múltiplos escalares deles mesmos.

Um autovetor de uma matriz quadrada,  $M$ , é o vetor não nulo  $\mathbf{x}$  tal que  $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ; este  $\mathbf{x}$  é chamado autovetor associado a  $\lambda$ (autovalor).

Assim, para obter os autovalores de uma matriz, utiliza-se a equação  $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Que resulta em:

$$M\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(M - I\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ (polinômio característico)}$$

Considerando o primeiro fator  $M - I\lambda = 0$ , temos pelo determinante desta matriz os autovalores da matriz. De acordo com Lay (2011) os autovalores indicam a dilatação ou compressão dos vetores mantidas as direções dos mesmos.

Lay (2011) apresenta a importância de se obter uma matriz positiva definida para representar o estudo do comportamento de um fenômeno em função do tempo ou da distância, que o autor atribui ao fato de haver um número finito de autovalores e conseqüentemente, autovetores para os quais o fenômeno mantém a estacionariedade (característica necessária a todo processo estocástico). A forma normalizada dos autovetores Lay (2011) denomina vetor de probabilidade e à matriz positiva definida, denomina matriz estocástica regular.

Exemplos práticos de aplicações de autovetores podem ser encontrados em Loreto et al. (2011), Lay (2011) e Boldrini et al. (1980) os quais ficam evidenciado a grande utilidade de formas quadráticas positivas definidas para resolução de problemas que envolvem estimativas e previsões futuras a partir de estudo do comportamento de uma amostra colhida em períodos distintos. Baseando-se nestes exemplos pode-se observar que os exemplos relacionados a sistemas dinâmicos discretos podem ser aplicados a sistemas dinâmicos contínuos, conforme sugere Lay (2011).

## 2.5 Multiplicador de Lagrange

De acordo com Hoffmann e Bradley(2008) em muitos problemas práticos, uma função de duas variáveis deve ser otimizada com certas restrições. Por exemplo, suponha que uma editora pretenda lançar um livro com um orçamento de R\$ 60.000,00 e precisa decidir qual é a melhor forma de dividir este dinheiro entre a produção e a propaganda de modo a maximizar as vendas do livro. Chamando de  $x$  a quantia destinada a produção,  $y$  a quantia destinada a propaganda e  $f(x,y)=20x^{1/2}y$ , representando o número de livros vendidos. Quanto a editora deverá investir na produção e quanto ela deverá investir em propaganda para que o número de exemplares vendidos seja o maior possível?

**Solução:** O objetivo é maximizar a função de vendas  $f(x,y) = 20x^{1/2}y$  com a restrição de que  $g(x,y) = x+y = 60.000,00$ . As equações de lagrange correspondentes são

$$30x^{1/2}y = \lambda \quad 20x^{3/2} = \lambda \quad \text{e} \quad x+y = 60$$

De acordo com as duas primeiras equações, temos:

$$30x^{1/2}y = 20x^{3/2}$$

Como  $f$  certamente não passa por um máximo e  $x = 0$ , podemos supor que  $x \neq 0$  e isolar  $y$  no primeiro membro deixando  $y$  em função de  $x$ .

$$y = \frac{2}{3}x$$

Substituindo esta expressão na terceira equação de Lagrange, obtemos

$$x + \frac{2}{3}x = 60 \quad \text{ou} \quad \frac{5}{3}x = 60$$

e, portanto,

$$x = 36 \quad \text{e} \quad y = \frac{2}{3}36 = 24$$

Assim, para maximizar as vendas, a editora deve investir R\$36.000,00 em produção do livro e R\$ 24.000,00 em propaganda. Neste caso, aproximadamente  $f(24,36) = 103.680$  exemplares do livro serão vendidos.

Holffmann e Bradley (2008) sugerem para visualização do processo de otimização de uma função de duas variáveis com restrições, que se pense na função como uma superfície no espaço tridimensional e na restrição (que é uma equação envolvendo  $x$  e  $y$ ), como uma curva no plano  $xy$ . Deste modo, quando procuramos o máximo ou o mínimo de uma função com uma dada restrição, estamos limitando nossa busca à parte da superfície que está diretamente acima da curva que representa a restrição. O ponto mais alto desta parte da superfície é o máximo com a restrição e o ponto mais baixo é o mínimo com a restrição, de acordo com a Figura 21.

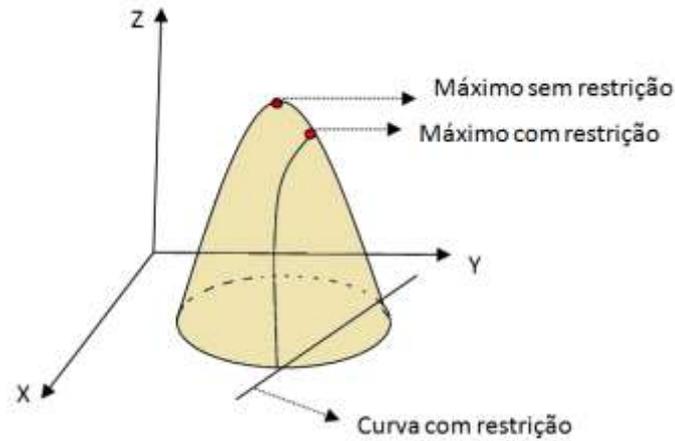


Figura 21 - Extremos com restrições e sem restrições.

O método dos Multiplicadores de Lagrange, de acordo com Holffmann e Bradley (2008) se baseia no fato de que todo extremo relativo de uma função  $f(x, y)$  sujeito a restrição  $g(x,y)=k$  deve ocorrer em um ponto crítico da função

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda [g(x, y) - k]$$

onde  $\lambda$  é uma nova variável (o Multiplicador de Lagrange). Para determinar os pontos críticos de  $F$ , calculamos as derivadas parciais

$$F_x = f_x - \lambda g_x \quad F_y = f_y - \lambda g_y \quad F_\lambda = -(g-k)$$

e resolvendo o sistema de equações  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$  e  $F_\lambda = 0$ :

$$\begin{aligned} F_x = f_x - \lambda g_x = 0 \quad \text{ou} \quad f_x = \lambda g_x \\ F_y = f_y - \lambda g_y = 0 \quad \text{ou} \quad f_y = \lambda g_y \\ F_\lambda = -(g - k) = 0 \quad \text{ou} \quad g = k \end{aligned} \tag{10}$$

Finalmente, calcula-se  $f(a,b)$  nos pontos críticos  $(a,b)$  de  $F$ .

Este método pode ser estendido a problemas de otimização envolvendo funções de mais de duas variáveis e mais de uma restrição. Assim, para otimizar a função  $f(x,y,z)$  com a restrição de que  $g(x,y,z)=k$ , temos que resolver o sistema de equações

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad f_z = \lambda g_z \quad g = k$$

Leithold (1990) apresenta dois problemas distintos que serão apresentados a seguir, para definir e demonstrar a fundamentação matemática da aplicabilidade do Multiplicador de Lagrange na resolução de problemas.

- i) Considere que se deseja determinar as dimensões relativas de uma caixa retangular, sem a tampa e com um dado volume, sendo usada a menor quantidade de material possível em sua fabricação.

**Solução:** Para solucionar o problema, o autor nomeia  $x$ , as unidades de comprimento da base da caixa,  $y$  as unidades a largura da caixa,  $z$  a altura da caixa e  $S$  unidades a área da superfície da caixa.

Cada uma das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  estão no intervalo  $(0,+\infty)$ . Tem-se então, as equações  $S = xy + 2xz + 2yz$  e  $V = xyz$ .

Resolvendo a segunda equação para  $z$  em termos de  $x$  e  $y$  e da constante  $V$ , iremos obter  $z = \frac{V}{xy}$  e substituindo esse valor na primeira equação, tem-se

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \tag{11}$$

Como  $z = \frac{V}{xy}$ , então, quando  $x = \sqrt[3]{2V}$  e  $y = \sqrt[3]{2V}$ ,

$$z = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$$

Logo, a caixa deve ter uma base quadrada e uma altura que é a metade do comprimento do lado da base.

- ii) Se  $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$ , determine, caso haja, os extremos relativos de  $f$ . Aplicando o teste da derivada segunda obtém os resultados e conclui-se que  $f$  tem um valor mínimo relativo de  $\frac{-9}{8}$  em cada um dos pontos  $(-1/2, 1)$  e  $(1/2, 1)$ .

De acordo com Leithold (1990) na solução do problema (i), minimizou-se a função com valores funcionais  $xy + 2xz + 2yz$ , sujeita à condição de que  $x, y$  e  $z$  *satisfaça, a equação*  $xyz = V$ . Comparando este problema com o problema (ii) no qual encontrou-se os extremos relativos da função  $f$  para a qual  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x^2 - 2y$ , são essencialmente dois tipos diferentes de problemas, pois no primeiro caso tem-se uma condição adicional, chamada de *vínculo (condição lateral ou restrição)*. Tal problema é chamado de problema com *extremos vinculados (condicionados ou com restrições)*, enquanto que o segundo tipo é um problema com extremos livres.

Para que o exemplo (i) fosse resolvido, foi necessário obter uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$  através da substituição de  $z$  na primeira equação, pelo seu valor da segunda equação. Como nem sempre é possível resolver a equação do vínculo para uma das variáveis em termos das outras, o procedimento que pode ser usado para encontrar os pontos críticos, no caso de um problema com extremos vinculados, foi desenvolvido por L. Lagrange (1736-1813), conhecido como método dos multiplicadores de Lagrange (LEITHOLD, 1990).

A validade do método dos *multiplicadores de Lagrange* pode ser mostrada se considerarem o problema geral do extremo vinculado.

A demonstração matemática do *Multiplicador de Lagrange* pode ser encontrada em Leithold (1990) onde se conclui que o ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  no qual a função  $f$  tem um extremo relativo está entre os pontos críticos da função  $F$ , definida por

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

### 2.5.1 Justificativa do método dos Multiplicadores de Lagrange

Holffmann e Bradley (2008) apresenta uma demonstração geométrica baseada no fato de que a tangente a curva de nível  $F(x,y)=C$  em cada ponto  $(x,y)$  é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_x}{F_y}$$

contanto que  $F_y \neq 0$ .

Considere o seguinte problema de otimização com restrições:

Maximizar  $f(x,y)$  com a restrição de que  $g(x,y) = k$ . Geometricamente, isto significa que é preciso encontrar a curva de nível mais elevada de  $f$  que intercepta a curva da restrição,  $f(x,y) = k$ . Como mostra a Figura 22, a intersecção crítica ocorre no ponto em que a curva de restrição é tangente a uma curva de nível, ou seja, no ponto em que a inclinação da curva de restrição  $g(x,y) = k$  é igual a inclinação da curva de nível  $f(x,y) = C$ .

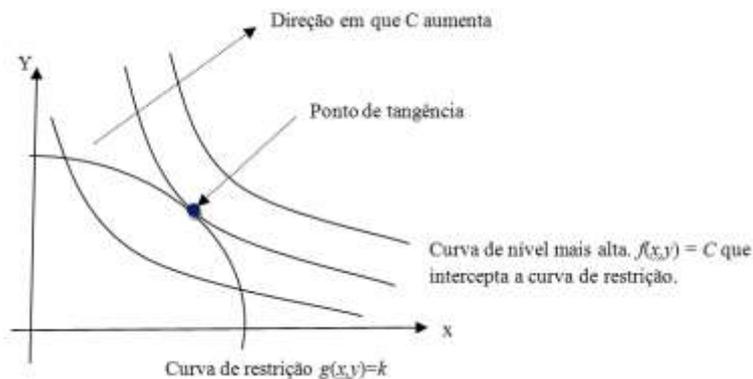


Figura 22 - Curvas de nível e a curva de restrição.

De acordo com a expressão proposta no início desta discussão, temos:

Inclinação da curva de restrição = Inclinação da curva de nível

$$\frac{g_x}{g_y} = \frac{f_x}{f_y}$$

ou seja,

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$$

Chamando de  $\lambda$  esta razão, temos

$$\frac{f_x}{g_x} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{f_y}{g_y} = \lambda$$

O que nos dá as duas primeiras equações de Lagrange

$$f_x = \lambda g_x \quad \text{e} \quad f_y = \lambda g_y$$

A terceira equação de Lagrange,

$$g(x,y) = K$$

expressa, simplesmente, o fato de que o ponto de tangência está sobre a curva de restrição.

O *Multiplicador de Lagrange* pode ser definido da seguinte forma:

Se  $M$  é o valor máximo da função  $f(x,y)$  com a restrição de que  $g(x,y) = k$ . O *Multiplicador de Lagrange*  $\lambda$  é a taxa de variação de  $M$  em relação a  $k$ , ou seja,

$$\lambda = \frac{dM}{dk}$$

Assim,  $\lambda$  é a variação de  $M$  produzida por uma variação unitária de  $k$ .

*Para o caso de Krigagem, subtrai-se o máximo da função como a inserção do multiplicador de Lagrange, obtendo-se assim a garantia de variância mínima na fórmula.*

Observe que as equações (10) podem ser escritas na forma vetorial

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0 \quad \text{em } (x_0, y_0, z_0) \quad \text{onde } \nabla g \neq 0.$$

Esta mesma equação na krigagem é aplicada da seguinte forma:

$$\nabla f - \lambda \nabla g = 0 \quad \text{em } (x_0, y_0, z_0) \quad \text{onde } \nabla g \neq 0$$

Verificando-se que a equação obtida representa derivadas direcionais que podem ser escritas na forma vetorial e para a sua aplicação faz-se necessário a compreensão de gradiente de uma forma vetorial e sua significação analítica. A seguir será apresentada a definição e representação de gradiente.

### 2.5.2 Gradiente

De acordo com Leithold (1990) as derivadas parciais  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  medem as taxas de variação dos valores funcionais na direção dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. As derivadas direcionais dão as taxas de variação dessas funções em qualquer direção. O *gradiente* dá a direção e o sentido em que a função tem a sua maior taxa de variação.

#### i) Derivadas direcionais e gradiente

Generalizando a definição de derivadas parciais, podemos obter a taxa de variação de uma função em relação a qualquer direção e sentido (LEITHOLD, 1990) e isto nos leva ao conceito de *derivadas direcionais*.

Para compreensão considere  $f$  uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$  e seja  $P(x, y)$  um ponto do plano  $xy$ . Suponhamos que  $U$  seja o vetor unitário que faz com a parte positiva do eixo  $x$  um ângulo cuja medida em radianos é  $\theta$ . Então,  $U = \cos \theta i + \sin \theta j$ .

A Figura 23 mostra a representação de  $U$  com ponto inicial em  $P(x, y)$ .

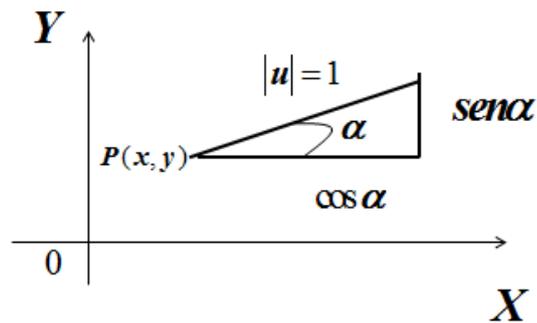


Figura 23 - Derivada direcional definida por um ponto  $P(x,y)$  e um vetor unitário  $U$ .

Da Figura 23, pode-se definir que, Sendo  $f$  uma função de duas variáveis em  $x$  e  $y$ . Se  $U$  for o vetor unitário  $\cos \theta i + \text{sen} \theta j$ , então a derivada direcional de  $f$  na direção de  $U$ , denotada por  $D_U f$ , será dada por

$$D_U f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \text{sen} \theta) - f(x, y)}{h}$$

se o limite existir.

A derivada direcional dá a taxa de variação dos valores funcionais  $f(x,y)$  em relação a direção e sentido do vetor unitário  $U$  (Figura 24). Uma equação da superfície  $S$  na figura é  $z = f(x, y)$ .  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  é um ponto na superfície, e os pontos  $R(x_0, y_0, 0)$  e  $Q(x_0 + h \cos \theta, y_0 + h \text{sen} \theta, 0)$  são pontos no plano  $XOY$ . O plano que passa por  $R$  e  $Q$ , paralelo ao eixo  $Z$ , faz um ângulo de  $\theta$  rad. com a direção positiva do eixo  $X$ . Este plano intercepta a superfície  $S$  na curva  $C$ . A derivada direcional, calculada em  $P_0$  é a inclinação da reta tangente a curva  $C$  em  $P_0$ , no plano  $R, Q$  e  $P_0$ . Se  $U = i$ , então  $\cos \theta = 1$  e  $\text{sen} \theta = 0$ .

Dá a definição:

$$D_i f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$ .

Se  $U = j$ , então  $\cos \theta = 0$  e  $\text{sen} \theta = 1$  e

$$D_j f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

que é a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$ .

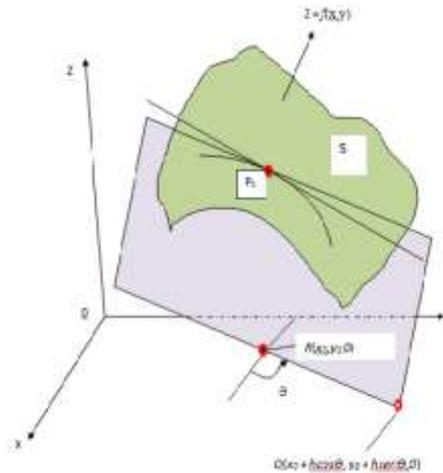


Figura 24 - Derivadas direcionais e reta tangente a curva C.

Assim,  $f_x$  e  $f_y$  são casos particulares da derivada direcional nas direções dos vetores unitários  $i$  e  $j$ , respectivamente.

Agora, para obter uma fórmula que nos possibilite calcular a derivada direcional de forma mais rápida, Leithold (2008) parte de uma função  $g$  de uma única variável  $t$ , com  $x$ ,  $y$  e  $\theta$  fixos, tal que

$$g(t) = f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta)$$

e seja

$$U = \cos \theta i + \sin \theta j.$$

Pela definição de derivada ordinária e aplicando a regra da Cadeia no segundo membro da função  $g'(t)$  chega-se ao Teorema 1.

Teorema 1

Se  $f$  for uma função diferenciável de  $x$  e  $y$  e  $U = \cos \theta i + \text{sen} \theta j$ , então

$$D_U f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \text{sen} \theta$$

Do Teorema 1, decorre que a derivada direcional  $D_U f(x, y)$  pode ser escrita como um produto escalar de dois vetores.

$$D_U f(x, y) = (\cos \theta i + \text{sen} \theta j) \cdot [f_x(x, y) i + f_y(x, y) j] \quad (12)$$

Da representação de Derivadas direcionais como produto escalar de dois vetores, pode-se definir o segundo vetor do segundo membro como o vetor mais importante, chamado de *gradiente*.

Leithold (2008) enuncia os seguintes Teoremas que melhor caracterizam gradiente:

Teorema 2

Se  $f$  for uma função de duas variáveis  $x$  e  $y$  e  $f_x$  e  $f_y$  existirem, então o gradiente de  $f$ , denotado por  $\nabla f$  (lê-se “del  $f$ ”), será definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y) i + f_y(x, y) j$$

Da definição do Teorema 2, a equação (12) pode ser escrita como

$$D_U f(x, y) = U \cdot \nabla f(x, y)$$

De modo similar, o teorema a seguir fornece um método de cálculo de derivada direcional de uma função de três variáveis.

Teorema 3

Se  $f$  for uma função três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) e  $U = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ , então

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y) \cos \alpha + f_y(x, y) \cos \beta + f_z(x, y) \cos \gamma$$

O Teorema 3 permite calcular a taxa de variação de  $f(x, y, z)$  em um ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  na direção de um vetor  $U$ .

Teorema 4

Se  $f$  for uma função de três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  e as derivadas parciais  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  existirem, então o gradiente de  $f$ , denotado por  $\nabla f$ , será definido por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j + f_z(x, y)k$$

Da mesma forma que as funções de duas variáveis, segue da definição do Teorema 4 que se  $U = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ , então

$$D_U f(x, y) = U \cdot \nabla f(x, y, z)$$

Assim sendo, qualquer derivada direcional de uma função diferenciável pode ser obtida se multiplicarmos escalarmente o gradiente pelo vetor unitário na direção e sentido desejados.

A derivada direcional  $D_U f(x, y, z)$  será um máximo quando  $U$  estiver na direção e sentido do gradiente e a derivada direcional máxima será o módulo do gradiente (LEITHOLD, 1990). Aplicações de gradiente aparecem em Física e em muitas outras áreas das Ciências Exatas e da Terra.

Para uma melhor interpretação e utilidade do conceito de gradiente faz-se necessário introduzir o conceito de curvas de níveis, que é um conceito mais elaborado, mas que para uma apresentação clara aborda-se aqui de forma mais didática sem demonstrações matemáticas, mas de forma gráfica.

A distribuição espacial de uma propriedade ou grandeza pode ser representada por linhas fechadas passando apenas pelos pontos com determinado valor de intensidade. Se selecionarmos alguns destes valores e passarmos as linhas sobre eles, consegue-se uma figura planificada (curvas de níveis) que mostra a distribuição espacial da grandeza em estudo, de forma mais clara.

As curvas de níveis desse tipo são chamadas de “Isolinhas” porque são linhas obtidas pelos pontos onde a intensidade da grandeza assume sempre o mesmo valor. Estas são nomeadas por nomes específicos de acordo com a grandeza que está representando. Por exemplos as isolinhas isóbaras representam as grandezas de pressão, as isolinhas isotérmicas representam as grandezas de temperatura, dentre outras nomenclaturas específicas. Segue abaixo a Figura 25 que apresenta um exemplo de isolinhas representando temperaturas. O estudo foi baseado na compreensão do assunto apresentado em Leithold (1990), Rodrigues (2006), Guidorizzi (2001), Galvanin (2002) e Stewart (2002).

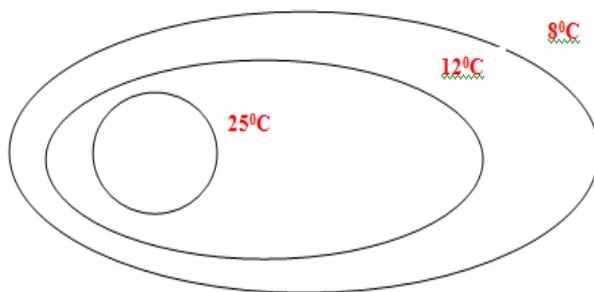


Figura 25 - Isolinhas isotérmicas.

O gradiente aponta para a região onde a grandeza assume o seu valor máximo através de vetor ortogonal às isolinhas, deste modo, a representação espacial de uma grandeza por meio de curvas de nível é necessária para a determinação do gradiente.

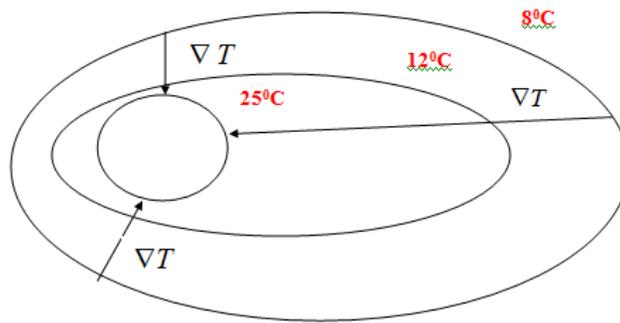


Figura 26 - Gradientes representados por vetores ortogonais as isolinhas isotérmicas.

Embora o *gradiente* possa ser representado por infinitos vetores, é conveniente representar por um único vetor, quando a distribuição é simétrica ou aproximadamente simétrica, mesmo sendo a distribuição mais complexa. Tal representação pode ser descrita por:

$$\nabla T \approx \frac{\Delta T}{\Delta X}$$

A unidade de gradiente representa a unidade da grandeza em estudo dividida pela grandeza da distância.

## 2.6 Krigagem

O termo krigagem foi utilizado pela primeira vez por Matheron (1963) em homenagem ao engenheiro de minas, Daniel G. Krige e consiste na técnica de interpolação de atributos de pontos para locais não amostrados, tornando um campo de observações pontuais em campo contínuo cujos padrões espaciais são obtidos levando-se em consideração a verificação de algumas hipóteses necessárias para garantia de precisão nas estimativas.

O raciocínio que está na base da interpolação é que, em média, os valores do atributo tendem a ser similares em locais mais próximos do que em locais mais afastados. Esse conceito também fundamenta a base das relações espaciais entre fenômenos geográficos, utilizando a correlação espacial como meio de diferença dos atributos estimados (CÂMARA, MEDEIROS, 1998).

Para o entendimento do preditor de Krigagem, suponha que se queira estimar valores,  $\hat{z}$ , para qualquer local  $x_0$ , onde não há valores medidos e que a estimativa deva ser uma combinação linear dos valores medidos em outros locais. Neste caso, de acordo com Vieira (2000) para melhor estimação, o preditor de Krigagem incorpora em sua estrutura, a dependência espacial expressa no semivariograma para a atribuição de pesos aos valores medidos e a partir disso, prediz valores para pontos desconhecido, por meio da combinação linear expressa pela fórmula do preditor de Krigagem:

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i)$$

em que,  $N$  é o número de valores medidos,  $\hat{z}(x_0)$ , a estimativa e  $\lambda_i$ , são os pesos associados a cada valor medido  $z(x_i)$ .

Na Krigagem os pesos são variáveis de acordo com a variabilidade espacial expressa pelo semivariograma. Este preditor é similar a uma média ponderada móvel, mas o que o diferencia e o torna um preditor ótimo é a maneira como os pesos são atribuídos, de acordo com a dependência espacial expressa pelo semivariograma.

O preditor de Krigagem tem a garantia de otimalidade e não viés. A condição de otimalidade e não tendência requer variância mínima. Estatisticamente, isto significa:

- i)  $E[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)] = 0$ , a esperança do erro é nula.
- ii)  $Var[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)] = E\{[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)]^2\} = \textit{mínima}$

Essas duas condições e o raciocínio de que prediz valores para locais não amostrados com o mínimo de erros, constituem o princípio básico do “ Jack-Knifing”.

### 2.6.1 Sistema de Krigagem

O que diferencia o método de Krigagem dos demais métodos de interpolação é a forma como os pesos são incorporados. Nos métodos de interpolação pelo inverso do quadrado da distância, por exemplo, o peso da interpolação é baseado apenas no inverso da distância entre

o local a ser interpolado e seus vizinhos, sem levar em consideração os valores dos atributos dos pontos.

O sistema de Krigagem incorpora em seus ponderadores a dependência espacial entre as amostras. Esta dependência espacial é expressa por meio dos parâmetros do modelo de semivariograma ajustado.

Deste modo, para descrever o sistema de Krigagem utiliza-se  $N+1$  equações para estimar  $N$  pesos +  $\mu$  (Multiplicador de Lagrange), uma matriz de semivariância de ordem  $N+1$ , calculada sobre os valores amostrados e um vetor de valores estimados para o ponto  $x_0$  pelo semivariograma, acrescentado o elemento 1 na última linha.

O sistema de krigagem é representado do seguinte modo:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc}
 \gamma(x_1, x_1) & \gamma(x_1, x_2) & \gamma(x_1, x_n) & 1 \\
 \gamma(x_2, x_1) & \gamma(x_2, x_2) & \gamma(x_2, x_n) & 1 \\
 \gamma(x_i, x_1) & \gamma(x_3, x_2) & \gamma(x_3, x_n) & 1 \\
 \dots & \dots & \dots & \vdots \\
 \gamma(x_n, x_1) & \gamma(x_n, x_2) & \gamma(x_n, x_n) & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0
 \end{array} \right] \cdot \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{array} \right] \\ \text{Vetor de pesos e} \\ \text{Multiplicador} \\ \text{de Lagrange} \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \gamma(x_0, x_1) \\ \gamma(x_0, x_2) \\ \vdots \\ \gamma(x_0, x_n) \\ 1 \end{array} \right] \\ \text{Vetor de semivariâncias} \\ \text{estimada para } x_0 \end{array} \quad (13)
 \end{array}$$

Multiplicador de Lagrange é incorporado ao vetor de pesos por meio de uma variável auxiliar,  $\mu$ , para constituir-se na vinculação da condição impostas pela Krigagem do sistema matricial e parar isso é atribuido uma linha e uma coluna a mais, composta com todos os elementos iguais a 1, à matriz de semivariâncias entre as amostras e uma linha a mais, comoposta com todos os elementos iguais a 1 no vetor de semivariâncias estimadas, a fim de satisfazer as condições impostas pelas propriedades operatórias de produto e igualdade de matrizes.

O Multiplicador de Lagrange (Seção 2.6.) foi incorporado ao sistema Matricial para permitir inserir vinculação dos extremos das funções envolvidas às condições de otimalidade

e não viés as quais a Krigagem está vinculada: *a esperança dos erros ser nulo e a variância dos erros ser mínima.*

Em notação matricial, pode se representar o sistema de Krigagem por equação matricial do seguinte modo:

$$C.\lambda = b$$

ou, quando se usa o semivariograma tem-se:

$$\Upsilon.\lambda = b$$

em que  $C$  é a matriz de covariâncias entre as amostras ou  $\Upsilon$  a matriz de semivariâncias entre as amostras,  $\lambda$  é o vetor dos pesos acrescentado de uma variável auxiliar  $\mu$ , o *Multiplicador de Lagrange*, e  $b$  é o vetor de valores estimados para o ponto  $x_0$  de acordo com o semivariograma ou covariograma.

Para melhor compreensão da forma como as matrizes são representadas, suponha que se queira estimar um ponto  $x_0$  baseando na vizinhança de tamanho  $N = 4$ . Assim, as matrizes  $C$  ou  $\Upsilon$ , forem de ordem 5, estas podem ser escritas, explicitamente, como

$$C = \begin{bmatrix} C(x_1, x_1) & C(x_1, x_2) & C(x_1, x_3) & C(x_1, x_4) & 1 \\ C(x_2, x_1) & C(x_2, x_2) & C(x_2, x_3) & C(x_2, x_4) & 1 \\ C(x_3, x_1) & C(x_3, x_2) & C(x_3, x_3) & C(x_3, x_4) & 1 \\ C(x_4, x_1) & C(x_4, x_2) & C(x_4, x_3) & C(x_4, x_4) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \gamma(x_1, x_1) & \gamma(x_1, x_2) & \gamma(x_1, x_3) & \gamma(x_1, x_4) & 1 \\ \gamma(x_2, x_1) & \gamma(x_2, x_2) & \gamma(x_2, x_3) & \gamma(x_2, x_4) & 1 \\ \gamma(x_3, x_1) & \gamma(x_3, x_2) & \gamma(x_3, x_3) & \gamma(x_3, x_4) & 1 \\ \gamma(x_4, x_1) & \gamma(x_4, x_2) & \gamma(x_4, x_3) & \gamma(x_4, x_4) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

o vetor de lambdas  $\boldsymbol{\lambda}$ , pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ -\mu \end{bmatrix}$$

e o vetor  $\mathbf{b}$ , do lado direito dos sistemas de krigagem, pode ser escrito como

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} C(x_1, x_0) \\ C(x_2, x_0) \\ C(x_3, x_0) \\ C(x_4, x_0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \gamma(x_1, x_0) \\ \gamma(x_2, x_0) \\ \gamma(x_3, x_0) \\ \gamma(x_4, x_0) \\ 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente, quando são usados  $Cov(\mathbf{h})$  ou  $\gamma(\mathbf{h})$ .

O sistema de Krigagem, em sua forma matricial apresenta as seguintes características:

- i) A matriz  $\Upsilon$  ou  $C$  é uma matriz simétrica ao redor de zero, ou seja, possui diagonal principal igual ao valor pepita ou zero. A propriedade de simetria da matriz  $\Upsilon$  ou  $C$  é garantida pela satisfação das hipóteses de estacionariedade. A garantia da exatidão nos cálculos é assegurada pela condição de positividade definida da matriz, ou seja, a matriz reflete a condição de independência das localizações dentro da mesma área e a dependência da distância  $\mathbf{h}$  entre as amostras. Disto decorre que na matriz de variâncias ou semivariâncias o valor da covariância de um ponto, por exemplo,  $Cov(x_1, x_3) = Cov(x_3, x_1)$ , ou seja,  $Cov(\mathbf{h}) = Cov(-\mathbf{h})$  e assim sucessivamente.

Do mesmo modo, a diagonal secundária da matriz  $C$  ou  $\Upsilon$  que compõe o sistema matricial de krigagem **(13)**, refletirá no seu centro o efeito pepita e nas laterais em torno do efeito pepita, a variância estimada para a maior distância  $\mathbf{h}$  entre as amostras.

- ii) Para cada ponto interpolado o sistema é resolvido para cada estimativa de  $\hat{z}$  e para cada variação do número de amostras envolvidas na estimativa.

Outra particularidade é que a diagonal principal da matriz  $C$  ou  $\Upsilon$  deve ser preenchida por valores de  $Cov(\mathbf{h})$  ou  $\gamma(\mathbf{h})$  correspondentes a vetores nulos. Isso faz com que a diagonal principal para a matriz  $C$  tenha valores máximos e iguais a  $Cov(0)$  e para  $\gamma$  valores iguais a zero. Isso acontece porque  $Cov(0)$  é o máximo valor da função covariância e é igual ao patamar do semivariograma, e  $\gamma(0)=0$  qualquer que seja o efeito pepita,  $C_o(0)$ .

Assim,  $\gamma(0)=0$  e  $\gamma(e)=Cov(0)$ , efeito pepita. Onde  $e$  é a menor distância entre as amostras (ANDRIOTTI, 2003).

### 2.6.2 Krigagem Ordinária

De acordo com Andriotti (2003), a Krigagem Ordinária estima valores de atributos para locais não amostrados por meio de combinação linear dos valores de um subconjunto amostral, baseando-se em média ponderada móvel que leva em conta a estrutura de variabilidade expressa pelo semivariograma e pela localização dos valores obtidos por meio de amostragem. Ou seja, neste processo de estimação a média é considerada desconhecida e não exige estacionariedade da média para toda a área estudada, razão pela qual ela é a mais utilizada.

A Krigagem Ordinária utiliza um preditor linear não viciado com variância mínima (“BLUP-Best Linear Unbiased Predictor”) para interpolação do atributo em posições não amostradas (ISAAKS, SRIVASTAVA, 1989).

Segundo Trangmar et al. (1985) o valor interpolado de uma variável regionalizada  $Z(x_0)$ , num local  $x_0$ , pode ser determinada por:

$$\hat{z}(x_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot Z(x_i)$$

onde:

$\hat{z}(x_0)$  = valor predito para o local  $x_0$  não amostrado;

$z(x_i)$  = valores obtidos por amostragem no campo; e

$\lambda_i$  = pesos associados ao valor medido na posição  $x_i$ .

A melhor predição de  $\hat{z}(x_0)$  é obtida quando:

- a) O Preditor é não tendencioso

$$E\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\} = 0$$

- b) A variância de estimativa é mínima:

$$Var[\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)] = \text{mínimo}$$

A garantia de não tendência na estimativa de  $\hat{z}$  por meio de  $z$  é garantida pela soma dos pesos das amostras iguais a 1.

Para que a variância seja mínima, sob a condição de que a soma dos pesos seja igual a um faz-se necessário a introdução do multiplicador de Lagrange para dedução das equações. O sistema de krigagem resultante, descrito matricialmente pode ser expresso algebricamente por:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \gamma(x_i, x_j) + \mu = \gamma(x_i, x_0)$$

onde,  $\mu$  é o multiplicador de Lagrange.

A variância de estimativa é dada por:

$$\sigma_E^2 = \mu + \sum \lambda_i \gamma(x_i, x_0)$$

O processo de estimação é descrito por meio de sistema de equações de Krigagem com  $n+1$  equações e  $n+1$  incógnitas e uma solução única produz  $n$  pesos  $\lambda$  e um multiplicador de Lagrange  $\mu$ . Este sistema pode ser expresso em notação matricial:

$$A\lambda = b$$

onde,  $A$  é a matriz das variâncias dos valores amostrados envolvidos na estimativa de  $\hat{z}(x_0)$ ;  $\lambda$  é um vetor coluna que contém os pesos e o multiplicador de Lagrange e  $b$  um vetor coluna das variâncias entre os valores amostrados e o ponto a ser estimado.

Deste modo, a variância de estimativa é expressa matricialmente por:

$$\sigma_E^2 = b' \lambda \quad (14)$$

em que  $b'$  é a transposta da matriz  $b$ .

A variância de Krigagem Linear fornece uma medida que incorpora fatores relevantes para determinação de incerteza do estimador. Por isso, ela vem sendo utilizada como medida de incerteza por intervalo de confiança centrado na média de uma distribuição Gaussiana. No entanto, isso requer que duas condições básicas sejam satisfeitas (ISAAKS, SRIVASTAVA, 1989):

- a) A distribuição de probabilidade do atributo deve ser multigaussiana (difícil de ser verificado).
- b) O patamar definido no semivariograma deve corresponder ao valor de variância do atributo. (este é necessário porque a variância é afetada pela escalabilidade do semivariograma). O patamar deve coincidir com o valor da variância global do atributo em estudo.

De acordo com Goovaerts (1997), Deutsch e Journel (1998) citados por Felgueiras (2001) a premissa (a) é difícil de ser verificada e raramente ocorre para atributos ambientais. Segundo o autor, na prática, verificando-se a normalidade da distribuição bivariada, supõe-se também a normalidade da distribuição multivariada.

Ainda, segundo o mesmo autor, a premissa (b) é necessária, pois a variância do modelo é influenciada por artefatos, surgidos ao se ajustar o semivariograma experimental por um

modelo de variograma teórico. Caso isso ocorra, o variograma deve ser reescalado para que o patamar coincida com o valor da variância global do atributo em estudo.

A partir das características de não tendenciosidade do estimador e de minimização da variância do erro de estimação, chega-se a formulação para a variância do erro do preditor de Krigagem Ordinária,  $\sigma_0^2$ , descrito por (ISAAKS, SRIVASTAVA, 1989 apud FELGUEIRAS, 2001):

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{0i}(x_i) \lambda_{0j}(x_j) C(x_i, x_j) - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_{0i} C(x_0, x_i) \quad (15)$$

onde,  $\sigma^2 = C(0)$  é a variância global do atributo e representa o quanto é errático o atributo. Isto significa que atributos com comportamentos mais erráticos têm variância global alta, contribuindo assim, para aumentar o valor da variância de estimação.

Para uma melhor compreensão da fórmula (15), sabe-se que a covariância  $C(x_0, x_i)$ , entre duas localizações diminui a medida que a distância entre elas aumentam, daí é possível perceber que as covariâncias entre as amostras  $C(x_i, x_j)$  aumentam a variância de estimação sempre que as amostras estão próximas entre si, e portanto penalizam aglomerados de amostras.

Em contrapartida, a variância de estimação diminui com o aumento da covariância  $C(x_0, x_i)$ , ou seja, com a proximidade da amostra em relação a posição  $x_0$ .

De acordo com estas observações, pode-se perceber que a krigagem fornece uma medida que incorpora fatores relevantes para a determinação da incerteza do estimador. Por isso ela vem sendo usada como medida de incerteza por intervalo de confiança centrado na média de uma distribuição Gaussiana.

Pode-se observar na equação (14) que o valor da variância de Krigagem está relacionado com a distribuição espacial das amostras e não depende diretamente dos valores de atributo.

Deutsch e Journel (1998) argumentam que “as variâncias dos erros de krigagem linear, sendo independentes dos dados, fornecem apenas uma comparação entre diferentes configurações geométricas dos dados”. Entretanto, modelos de incerteza, baseados na variância do erro de Krigagem vem sendo utilizado em modelos de probabilidade a priori para o atributo em estudo, sem que essas premissas sejam consideradas (FELGUEIRAS, 2001).

## 2.7 O preditor de Krigagem por Indicação ou Krigagem Indicativa

Os preditores de krigagem são considerados lineares por predizerem um valor em uma posição espacial não observada, segundo uma combinação linear dos valores de um subconjunto amostral local (FELGUEIRAS, 2001).

O procedimento de Krigagem Indicativa consiste de um processo de predição não linear porque requer uma transformação não linear chamada de codificação por indicação que transforma cada valor do conjunto amostral  $Z(x_i)$ , em valores codificados por indicação (FELGUEIRAS, 2001). O grande ganho em relação a krigagem linear é que este procedimento consegue modelar atributos com alta variabilidade por ser não paramétrico e não sofrer interferência de *outlier* (FELGUEIRAS, 1999).

A codificação por indicação, sobre um conjunto de dados amostrais numéricos,  $z(x = x_0)$ , para um valor de corte  $z_k$  gera um conjunto amostral por indicação  $I(x = x_0; z_k)$  do tipo:

$$I(x = x_0; z_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } Z(x_i) \leq z_k \\ 0, & \text{se } Z(x_i) > z_k \end{cases} \quad \text{ou} \quad I(x = x_0; z_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } Z(x_i) \geq z_k \\ 0, & \text{se } Z(x_i) < z_k \end{cases}$$

A definição de um modelo de variograma depende da existência de uma distribuição mínima de 0's (zeros) e 1's (uns) no conjunto de amostras codificadas por indicação.

Ao se transformar os dados em 0 e 1, tem-se a vantagem de mudar a variável para variável indicadora, sendo a partir daí, submetidas as facilidades de se reduzir os cálculos,

pois, a partir desta transformação tornam-se válidas todas as propriedades operatórias de Função Indicadora (seção 2.1.3), que por definição apresenta simplicidade de cálculos.

Segundo Felgueiras (2001) da mesma forma que se utiliza o conjunto amostral do atributo para inferir valores para a variável aleatória numérica  $Z(\mathbf{x})$ , o conjunto de dados amostrais por indicação é utilizado para inferir valores para variáveis aleatórias por indicação  $I(\mathbf{x}; z_k)$ , com  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_\alpha$ .

A esperança condicional da variável aleatória numérica por indicação  $I(u; z_k)$  é calculada por:

$$\begin{aligned} E\{I(\mathbf{x}; z_k) | (n)\} &= 1 \cdot \text{prob}\{I(\mathbf{x}; z_k) = 1 | (n)\} + 0 \cdot \text{prob}\{I(\mathbf{x}; z_k) = 0 | (n)\} \\ &= 1 \cdot \text{prob}\{I(\mathbf{x}; z_k) = 1 | (n)\} = \hat{F}(\mathbf{x}; z_k | (n)) \end{aligned}$$

A definição, os axiomas e propriedades de Função de Probabilidade e Função Indicadora (seção 2.1.3) permite estabelecer relação com a Krigagem Indicativa uma vez que nas transformações dos dados, estes são transformados em 0 ou 1, exclusivamente, e ao interpolar um valor para um ponto qualquer não amostrado estima-se um valor que pertence ao intervalo [0,1], ou seja, estima um valor de probabilidade que obedece aos três axiomas de Kolmogorov, descritos nas expressões (3), Seção 2.1.3, permitindo com isso uma aproximação discretizada da *fdac* (função distribuição acumulada condicional) de  $Z(\mathbf{x})$  e deste modo, os valores podem ser usados diretamente para se estimar valores estatísticos característicos da distribuição, tais como: valor médio, variância, mediana, quantis e outros (FELGUEIRAS, 1999).

### 2.7.1 O estimador de Krigagem Indicativa para atributos numéricos

De acordo com Landim (2003) através do método de Krigagem Ordinária aplicado aos dados transformados por uma transformação binária, é possível elaborar estimativas de proporções para determinados valores que estão abaixo ou acima de um determinado nível de corte (percentis) de uma distribuição acumulada em determinado local; e, em seguida transformá-los em indicadores definidos pela expressão:

$$I_i(z_c) = \begin{cases} 1, & \text{se } z(x) \leq z_c \\ 0, & \text{se } z(x) > z_c \end{cases}$$

Onde:

$z(\mathbf{x})$  = valor observado;

$z_c$  = valor do nível de corte.

A função de distribuição acumulada dos valores abaixo do nível de corte é definida por:

$$\hat{F}(z_c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i I_i(z_c)$$

Onde:  $\lambda_i$  são os pesos,  $I_i$  os indicadores,  $n$  o número de pontos e  $z_c$  o nível de corte. Em

que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  é a condição de não viés.

De modo similar, obtém-se a função de distribuição acumulada dos valores acima do nível de corte. Os pesos da Krigagem Ordinária servem para equacionar os parâmetros da Krigagem Indicativa. Os variogramas experimentais dos dados transformados em indicadores (0 e 1) são calculados de acordo com os níveis de cortes desejados e definido por meio da seguinte formulação:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}; z_k) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [I(\mathbf{x} + \mathbf{h}; z_k) - I(\mathbf{x}; z_k)]^2$$

### 2.7.2 Vantagens e desvantagens da Krigagem Indicativa

De acordo com Isaaks e Srivastava (1989), Deutsch e Journel (1998), Goovaerts (1997) e Landim (2003), pode-se destacar as seguintes vantagens no procedimento de Krigagem Indicativa:

1. É não paramétrica. Não considera nenhum tipo de distribuição a priori para a variável aleatória e com isso permite a construção de aproximação discretizada da *fdac* de  $Z(x)$ , possibilitando assim, estimar diretamente quantís da distribuição.
2. A Krigagem Indicativa fornece metodologia única para espacialização de atributos de natureza temáticos e numéricos.
3. Diferentemente da Krigagem linear que estima a variância do erro da estimação em função do estimador e da distribuição geométrica das amostras, a Krigagem Indicativa possibilita a estimativa de incertezas, utilizando a função de distribuição acumulada condicional da variável aleatória que representa o atributo, independentemente do estimador.
4. Pode modelar atributos com alta variabilidade espacial sem precisar eliminar outlier.
5. Permite melhorar a qualidade da estimativa com o uso de amostras indiretas, retiradas de fontes auxiliares, em conjunto com o conjunto amostral do atributo (amostras diretas).

Os autores apontam as seguintes desvantagens:

1. Requer do especialista uma maior interatividade e maior conhecimento da variável em estudo para se definir quantidade de valores de corte a serem utilizados.
2. Exige um variograma dos valores transformados para cada valor de corte.
3. A aproximação da *fdac* apresenta alguns problemas, conhecidos como desvios de relação de ordem. Estes para atributos temáticos e numéricos são analisados a seguir.

Quando o atributo é numérico, os valores de probabilidades acumuladas condicionais, para cada valor de corte, são inferidos independentemente. Para que esses valores de probabilidades constituam uma distribuição legítima eles devem ser corrigidos para verificar as seguintes relações de ordem:

- a) Os valores inferidos de probabilidade acumulada,

$$0 \leq \hat{F}(x; z_k | (n)) \leq 1; \quad \forall z_k, k = 1, \dots, k$$

- b) O valor estimado da *fdac* para um valor de corte  $z_j$ , não deve ser maior do que a *fdac*, para um valor de corte quando  $z_k$ , quando  $z_j \leq z_k$ , ou seja:

$$\hat{F}(x; z_j | (n)) \leq \hat{F}(x; z_k | (n)); \quad \text{se } z_j \leq z_k.$$

A condição (a) pode ser garantida quando todos os pesos do estimador são positivos e somam 1.

Porém, a Krigagem não garante que todos os pesos sejam positivos. Por isso, é possível a inferência de valores de *fdac* fora do intervalo [0,1]. A solução apontada por Felgueiras (1999) foi ajustar os valores estimados para as bordas, ou seja, valores negativos são mapeados para 0 e valores maiores que 1 são mapeados para 1.

### 2.7.3 O uso da Krigagem Indicativa na agricultura de precisão

O uso da Krigagem Indicativa na agricultura de precisão permite a elaboração de mapas de probabilidades para gerenciamento de qualidade, de acordo com a necessidade de cada subárea da região em estudo por meio de ponto de corte baseados em valores de corte da variável. Cita-se como exemplo da larga aplicação da Krigagem Indicativa na agricultura de precisão o estudo de variáveis do solo com o objetivo de produzir café de qualidade com alta produtividade, através da adoção de técnicas de manejo adequadas a cada local dentro da região analisada.

Através da análise de mapas de contorno ou de superfície, gerados por meio da krigagem, pode-se tomar decisões importantes, por exemplo, em relação ao aumento da eficiência na utilização de fertilizantes, com redução de custo e aumento de produtividade. Isto porque a aplicação de recomendações médias de fertilizantes, usualmente utilizadas pelos silvicultores, pode resultar em uma super ou subfertilização de uma área, com implicações negativas no ambiente e na relação custo-benefício (MULLA et al., 1992).

## **2.8 Consorciação de Culturas Anuais e Frutíferas com Culturas Perenes**

Dados de pesquisas recentes apontam que os sistemas consorciados favorecem o manejo fitotécnico das culturas associadas, ocasionando na maioria das vezes, aumento de produção por unidade de área e maior lucratividade para os olericultores (MONTEZANO, PEIL, 2006).

Vários resultados de pesquisa têm sido obtidos com o consórcio milho-feijão, abrangendo diversos aspectos como o sistema e épocas de semeadura, porte das plantas, espaçamento, população de plantas, adubação, retorno econômico e outros, que têm permitido aumentar a eficiência do sistema (VIEIRA, 1985).

No Brasil, em razão da grande importância que o consórcio representa, tem-se procurado estabelecer sistemas de produção milho-feijão mais adaptados para as diversas regiões. Esses sistemas, no entanto, são recomendados com base na experiência de agricultores e extensionistas e, em parte, nos resultados da pesquisa, resultando em recomendações específicas para diversas regiões do país (EMBRAPA, 1977).

Dentre as plantas que estão sendo utilizadas em pesquisas no Brasil para arborização de cafeeiros, podem ser citadas a grevilea, a seringueira e o cajueiro. Entre essas espécies, o uso de frutíferas com alto valor de mercado e boas características para a arborização, como o coqueiro anão, a pupunha e bananeira, podem ser boas opções (EMBRAPA - MEIO AMBIENTE, 2009).

De acordo com EMBRAPA - Meio Ambiente (2007) em países produtores de café da América Latina, tais como a Colômbia, Venezuela, Costa Rica, Panamá e México, o cultivo do café sombreado tem sido um recurso utilizado para aumentar a biodiversidade vegetal e a renda do produtor. O sombreamento com espécies e espaçamentos adequados pode apresentar resultados satisfatórios quando comparado ao cultivo a pleno sol.

Um estudo liderado por Álvaro Fernández-Baldor na Guatemala concluiu que o monocultivo de café é de baixa rentabilidade para pequenos proprietários. As lavouras quando

consorciadas possibilitam aos produtores maior retorno econômico (mel, sementes florestais, frutas, castanhas, produtos fitofarmacêuticos, entre outros). Ainda, de acordo com Primavesi (1999), as árvores também podem melhorar as propriedades físicas do solo, sendo a estrutura a mais importante. A estrutura é melhorada com o aumento do teor de matéria orgânica (folhas e raízes) e pela ação descompactante das raízes das árvores e da atividade microbiana, efeito este que minimiza a ocorrência de processos erosivos.

Além dos consórcios de milho e feijão, o consórcio de frutíferas como a bananeira com culturas perenes, têm sido recomendadas. Principalmente para culturas como o café, devido aos períodos longos de estagnação, a ocupação do solo até o início do ciclo produtivo e a degradação crescente do solo pela retirada de grande quantidade de nutrientes e matéria orgânica.

Outro motivo para o cultivo de café consorciado com a frutífera bananeira deve-se ao controle da velocidade dos ventos em cafezais pois, no sistema de cultivo em pleno sol a velocidade dos ventos provoca a queda e deformação das folhas e queda das flores antes de serem polinizadas, sendo assim, (PEZZOPANE et al., 2007) mostrou que o cultivo consorciado favorece no controle e redução da velocidade dos ventos em 48% e não altera significativamente as temperaturas ao longo do ano.

A consorciação do cultivo de bananeira com o cultivo de café a partir de análise das condições climáticas e do solo favorece na reposição de matéria orgânica ao solo porque de acordo com a EMBRAPA - Mandioca e Frutíferas (2004), embora a bananeira necessita de grande quantidade de nutrientes e matéria Orgânica para sua produção, 66% dos nutrientes absorvidos pela planta é devolvido ao solo após a retirada dos frutos e deste modo, promove a recuperação do solo.

#### **a) O cultivo de Café**

O café arábica é o mais difundido no Brasil, sendo cultivado em 200 859 estabelecimentos agropecuários, o que representa 70,0% dos estabelecimentos que produzem café no Brasil. A maior parte dos estabelecimentos que cultivam esta espécie está localizada

em Minas Gerais (52,2%), sendo responsáveis por 65,0% da produção nacional de café arábica (IBGE, 2007).

A espécie arábica apresenta bom desenvolvimento em terrenos acima de 900 metros de altitude, e produzem uma bebida de melhor qualidade, enquanto o canephora é mais precoce, mais resistente e mais produtivo, sendo cultivado em terrenos baixos, com plantas de maior envergadura (IBGE 2006).

De acordo com dados do IBGE (2012), Minas Gerais é o maior produtor brasileiro de café arábica e segundo este Censo, o ano de 2012 além de ser um ano de “safra cheia”, as condições do mercado em 2011 estimularam produtores a investirem na cultura, gerando aumento na produção de 17,6% em 2012 em todas as regiões do estado.

O cultivo de café consorciado com bananeira, apresenta, além de rentabilidade extra, a vantagem de , segundo EMBRAPA (2009) os restos culturais, por conterem quantidades significativas de nutrientes e C orgânico, retornarem ao solo, como forma de melhorá-lo gradativamente do ponto de vista físico-químico.

## **b) O cultivo de bananeira**

A bananeira é uma cultura que se desenvolve em diversos solos. Na escolha do solo para o seu cultivo, o conhecimento das propriedades físicas e químicas do solo é importante para o sucesso no cultivo. De acordo com informação da EMBRAPA - Mandioca e Frutíferas (2004), as propriedades químicas do solo podem ser alteradas por meio de adubações e sistema de cobertura verde e cobertura seca.

De acordo com dados da EMBRAPA - Meio Ambiente (2009) a bananeira, planta tipicamente tropical, exige calor constante, precipitações bem distribuídas e elevada umidade para o seu bom desenvolvimento e produção. A faixa de temperatura ótima para o desenvolvimento das bananeiras comerciais é de 26 a 28°C, com mínimas não inferiores a 15°C e máximas não superiores a 35°C. Os solos ideais para o cultivo da bananeira são os profundos, ricos em matéria orgânica, bem drenados e com boa capacidade de retenção de água.

### **2.8.1 Estudo das propriedades químicas do solo para o planejamento de manejo de consorciação de culturas**

O uso de técnicas de manejo de consorciação de culturas requer um estudo das variáveis, tais como, clima, altitude e solos. A análise de solos é o primeiro passo para escolha do local a se efetuar o consórcio a fim de evitar ou corrigir áreas onde a composição química do solo não propicia o cultivo das culturas que farão parte do manejo.

O uso continuado de uma mesma cultura, numa mesma estação de crescimento e numa mesma área (monocultura) vai contra a agricultura orgânica. Em função das grandes guerras, a demanda por cereais fez surgir a agricultura dirigida, prevalecendo a monocultura; o uso intensivo, inadequado e exagerado da mecanização, dos agrotóxicos, dos corretivos e dos adubos químicos, associados ao monocultivo e a erosão do solo, conduz a maioria dos solos cultivados na agricultura moderna ou cultivo convencional, a um processo de degradação e ao aumento gradativo de doenças, pragas e plantas espontâneas, e o que é pior, à contaminação das pessoas e do meio ambiente.

Nos sistemas rotacionais, os recursos disponíveis – água, nutrientes, luz, entre outros – são utilizados de modo mais eficiente, pois aliados ao retorno de matéria orgânica ao solo, as rotações contribuem para manter sua estrutura física, ajudam a reduzir a erosão e, em consequência, melhoram a fertilidade dos solos (ROMEIRO, 1992). As condições físico-químicas do solo condicionam desenvolvimento, o crescimento, o ciclo reprodutivo e a frutificação das plantas (EMBRAPA- CERRADO, 2008).

A Krigagem sugere a possibilidade de fazer o melhoramento dessas condições de forma localizada, mais eficiente e consequentemente mais viável financeiramente.

Para o planejamento de cultivo de café e bananeira utilizando a técnica de Krigagem Indicativa, faz-se necessário a definição de pontos de corte (níveis de suficiência) dos componentes químicos do solo. Vários autores como Alves (2012) pesquisaram sobre as faixas de suficiência dos nutrientes do solo para cada tipo de cultura. De acordo com Alvarez et al. (1999) a justificativa apresentada para esta classificação é que as culturas, e mesmo os

cultivares, variam muito nas sua capacidade de tolerância à acidez trocável, saturação por bases, saturação por alumínio e disponibilidade de nutrientes.

### **2.8.2 Classes de suficiência do solo quanto ao teor dos principais nutrientes para o cultivo de café no Estado de Minas Gerais**

De acordo com resultados obtidos por Alves (2012) em sua pesquisa de mestrado - UFV, Viçosa, MG, foram amostradas 41 lavouras em Viçosa, 36 lavouras em Manhuaçu, 17 lavouras em São Sebastião do Paraíso, 30 lavouras em Guaxupé e Patrocínio 44 lavouras, totalizando 168 unidades amostrais (UA) nas cinco regiões referidas em Minas Gerais.

As análises físicas e químicas foram realizadas no laboratório de análises de rotina do Departamento de Solos da UFV e teve como objetivo estabelecer uma classificação química dos solos para o cultivo de café de qualidade e alta produtividade, para tanto, o autor considerou, devido à bienalidade de produção do café, para efeito de avaliação, em cada UA, os dados da análise química do solo referente ao ano agrícola que apresentou maior produtividade, partindo-se da premissa de que plantas mais produtivas estão sob condições ótimas de produção, inclusive quanto a nutrição balanceada e equilibrada.

De acordo com informações obtidas em Alves (2012) foi elaborado os quadros com informações sobre os níveis dos nutrientes necessários para o cultivo de café de qualidade e alta produtividade. A seguir serão descritos os principais nutrientes do solo que foram analisados de acordo com os níveis de suficiência considerada 'boa' para o cultivo de café consorciado com bananeira, em que se utilizou os níveis descritos por Alves (2012) para o café e os descritos em EMBRAPA- Mandioca e Frutíferas (2004) para bananeira.

#### **A matéria Orgânica (MO)**

A importância da *MO* no solo para obtenção de boas produtividades na cultura do café pode estar relacionado, além das melhorias físicas e biológicas do solo mencionadas na literatura, também a melhorias químicas, por atuar diretamente na fertilidade do solo, disponibilizando nutrientes, em especial, N, S e P. De acordo com Malavolta (1996) o N é o

nutriente mais exigido pelo cafeeiro, e em geral, cerca de 20 a 30 kg de N por hectare são liberados anualmente para cada 1 dag/kg de matéria orgânica contida no solo. Indiretamente a *MO* aumenta a *CTC*, necessária à reserva e disponibilização de bases importantes para manutenção e produtividade do cafeeiro, como K, Ca e Mg (ALVES, 2012).

De acordo os resultados obtidos por Alves (2012) tem-se as Tabelas 1 e 2, contendo as faixas de suficiência para a *MO* no solo (0-20cm) e (20-50 cm) de profundidade, para lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.

Tabela 1 - Faixas de suficiência para MO no solo (0-20 cm) sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais (ALVES, 2012).

chMR* Estimada da produtividade (%)	Teor de MO (dag/kg)	Teor de MO	Faixa de suficiência
< 50	< 2,0	<2,25	Muito baixa
[50; 70]	[2,0; 2,5]	[2,25; 2,35[	Baixa
[70; 90]	[2,5; 3,2]	[2,35; 3,6[	Média
[90; 100]	[3,2; 4,0]	[3,6; 4,5[	Boa
[90; 100]	[4,0; 5,0]	[4,5; 5,0]	Alta
>90	> 5,0	> 5,0	Muito alta (excessivo)

**Nota:** \*chMR= Chance Matemática Relativa(Alves, 2012)

\*\*Considerado a partir do ponto médio da classe.

Tabela 2 - Faixas de suficiência para MO no solo (20-50 cm) de profundidade , sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.

chMR* Estimada da produtividade (%)	Teor de MO (dag/kg)	Teor de MO	Faixa de suficiência
< 50	< 0,7	< 0,85	Muito baixa
50  – 70	[0,7; 1,0]	[0,85; 1,3[	Baixa
70  – 90	[1,0; 1,6]	[1,3; 2,0[	Média
90  – 100	[1,6; 2,4]	[2,0; 3,0[	Boa
90  – 100	[2,4; 3,6]	[3,0; 3,6]	Alta
>90	> 3,6	> 3,6	Muito alta (excessivo)

**Nota:** \*chMR= Chance Matemática Relativa(ALVES, 2012)

\*\*Considerado a partir do ponto médio da classe.

## pH

De acordo com Alves (2012) o resultado encontrado mostra que as lavouras de café de alta produtividade estão associadas a um PH do solo ligeiramente ácido. A faixa mais

adequada, ou seja, a faixa classificada como boa vai de 5,0 a 5,4 sendo o ponto ótimo de 5,4. Na camada mais subsuperficial (20 a 50 cm), os resultados mostraram a diminuição constante das chances matemáticas de se encontrar lavouras de alta produtividade à medida que aumenta o valor de pH do solo.

Esse comportamento gerou uma dificuldade para se estratificar o resultado em faixas de suficiência. Isso indica que a existência de uma camada de solo mais ácida, como no caso, 20 a 50 cm, pode ser necessária para que se tenha boa disponibilidade de micronutrientes para suprir as necessidades fisiológicas de manutenção e produção das plantas (ALVES, 2012).

Na Tabela 3 são apresentadas as faixas de suficiência para pH de acordo com os resultados de (ALVES, 2012), avaliadas na camada 0-20 cm de profundidade.

Tabela 3 - Faixas de suficiência para Ph no solo (0-20 cm) sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.

chMR* Estimada da produtividade (%)	Faixa de suficiência pH	Faixa de suficiencia a partir do ponto médio	Classificação da faixa de suficiência
< 50	< 4,1	<4,4	Muito baixa
[50; 70]	[4,1; 4,6]	[4,4; 4,8[	Baixa
[70 ; 90]	[4,6; 5,0]	[4,8; 5,2[	Média
[90 ; 100]	[5,0; 5,4]	[5,2; 5,5[	Boa
[90 ; 100]	[5,4; 5,6]	[5,5 ; 5,6]	Alta
>90	>5,6	>5,6	Muito alta (excessivo)

**Nota:** \* Para a profundidade de 20-50 cm o valor máximo de pH que garantiu suficiência de 90 a 100% na produtividade de café foi de 4,0.

O pH do solo tem relação com a quantidade de H<sup>+</sup> liberados pelo solo (JACKSON,1963). O efeito do pH no cultivo do café pode ser direto ou indireto. O efeito direto está relacionado a permeabilidade da membrana das células que podem ocasionar perda de nutrientes já absorvidos, o efeito indireto está relacionado à disponibilidade de macronutrientes no solo, em faixas neutras (6-7) há maior disponibilidade nutrientes na forma ideal para absorção pelas plantas, logo em solos ácidos há maior carência desses nutrientes (Malavolta, 2006). Porém, Alves (2012) ajustou a faixa de suficiência de 5 a 5,4 para maior disponibilidade de nutrientes, o que diverge dos resultados apresentados por Malavolta (2006).

## **O Fósforo (P)**

O fósforo está associado ao crescimento da planta, por isso é um elemento limitante para produtividade de diversas culturas, por esse motivo é um dos elementos mais presente nos processos de adubação no Brasil. A deficiência de fósforo causa perda de brilho nas folhas que pode evoluir até a queda prematura das mesmas (MATIELLO et al., 2005)

De acordo com Alves (2012) os resultados da avaliação feita para fósforo (P) apresentou resultado inesperado, de forma que não foi possível classificar seus teores em faixas de suficiência de acordo com o método adotado para este trabalho.

Segundo o autor, investigando a camada de 20-50 cm encontrou-se o mesmo comportamento apresentado para camada superior que impossibilitou ao autor propor faixas de suficiências para o Fósforo (P), embora ele indique uma faixa ótima de 0,2 a 2,3 mg/dm<sup>3</sup> e o nível ótimo de 1,2 mg/dm<sup>3</sup> para camadas mais superficiais que estão associadas 57,8% de todas as lavouras de alta produtividade.

## **O Potássio (K)**

O Potássio (K) desempenha muitas funções mesmo sem ser metabolizado pela planta. Dentre as várias funções do Potássio ele participa da síntese de carboidratos, proteínas e adenosina trifosfato (ATP), ativa complexos de enzimas envolvidos com os processos fotossintéticos e respiratórios e desempenha o papel de osmorregulação, que contribui nos processos essenciais da planta, como movimento estomático e extensão celular. Participa do transporte de sacarose e outros solutos no floema e exerce importante papel no balanceamento de cátion e ânions no citoplasma das células (MARSCHNER, 1995).

Tabela 4 - Faixas de suficiência para K no solo (0-20 cm) de profundidade, sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais.

chRM estimada produtividade (%)	Classe de suficiência do Potássio (K) em mg/dm <sup>3</sup>	Classe de suficiência média do Potássio (K) em mg/dm <sup>3</sup>	Classificação da faixa de suficiência
< 50	< 36	< 41	Muito baixa
[50; 70]	[36; 46]	[41; 51,5[	Baixa
[70; 90]	[46; 57]	[51,5; 65[	Média
[90; 100]	[57; 73]	[65; 84[	Boa
[100; 90]	[73; 95]	[84; 95]	Alta
>90	>95	>95	Muito alta (excessiva)

Tabela 5 - Faixas de suficiência para K no solo (20-50 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais.

chRM estimada produtividade (%)	Classe de suficiência do Potássio (K) em mg/dm <sup>3</sup>	Classe de suficiência média do Potássio (K) em mg/dm <sup>3</sup>	Classificação da faixa de suficiência
< 50	< 13	<16,5	Muito baixa
[50; 70]	[13; 20]	[16,5; 26,5[	Baixa
[70; 90]	[20; 33]	[26,5; 43,5[	Média
[90; 100]	[33; 54]	[43,5; 63[	Boa
[100; 90]	[54; 82]	[63; 82]	Alta
>90	>82	>82	Muito alta (excessiva)

O potássio (K) é o segundo nutriente exigido em maior quantidade, depois do N, para a cultura do cafeeiro. É o primeiro quando se analisa a exportação de macronutrientes pela planta ( $K > N > Ca > Mg = S > P$ ). Isto se deve principalmente a sua maior concentração nos frutos (Malavolta, 1993). Tal comportamento, além de sua constante associação com a produtividade e qualidade dos grãos, evidencia a importância deste nutriente para o cafeeiro (ALVES, 2012).

### O Cálcio (Ca)

O Ca atua como elemento estrutural e é essencial na regulação da permeabilidade da membrana e resistência das paredes celulares (MARTINEZ et al., 2007), desse modo a

carência dele no cultivo é a descoloração marginal da folhas novas (MALAVOLTA, 1993) e é absorvido pelas plantas como  $\text{Ca}^{2+}$  e atua como elemento estrutural nas paredes celulares, sendo essencial na regulação da permeabilidade da membrana e na resistência das paredes celulares (MARTINEZ et al., 2007).

Ca e Mg representam os 3º e 4º nutrientes mais exigidos pelo cafeeiro em produção (GARCIA, 1983).

A seguir estão representadas as Tabelas 6 e 7 com as faixas de suficiências para o Cálcio (Ca) de 0 a 20 cm e de 20 a 50 cm de profundidade sob o cultivo de café de alta produtividade em Minas Gerais, de acordo com resultados obtidos por Alves (2012).

Tabela 6 - Faixas de suficiência para Ca no solo (0-20 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais (ALVES, 2012).

chRM estimada produtividade (%)	Faixa de suficiência do Cálcio (Ca) em $\text{cmol}_c/\text{dm}^3$	Faixas de suficiências a partir do ponto médio das classes Cálcio (Ca) em $\text{cmol}_c/\text{dm}^3$	Classificação da faixa de suficiência
< 50	< 1,0	< 1,2	Muito baixa
[50; 70]	[1,0; 1,4]	[1,2; 1,65[	Baixa
[70; 90]	[1,4; 1,9]	[1,65; 2,25[	Média
[90; 100]	[1,9; 2,6]	[2,25; 3,0[	Boa
[100; 90]	[2,6; 3,4]	[3,0; 3,4]	Alta
>90	>3,4	>3,4	Muito alta (excessiva)

De acordo com Alves (2012) o nível ótimo se enquadra na classe de solo “bom” pela CFSEMG (RIBEIRO et al., 1999) (2,4 a 4,0  $\text{cmol}_c/\text{dm}^3$ ) para Ca cujo valor de referência que representa o ponto ótimo é 2,4  $\text{cmol}_c/\text{dm}^3$  para Ca.

Tabela 7 - Faixas de suficiência para Ca no solo (20-50 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais (ALVES, 2012).

chRM estimada produtividade (%)	Faixa de suficiência do Cálcio (Ca) em cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Faixas de suficiências a partir do ponto médio das classes Cálcio (Ca) em cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Classificação da faixa de suficiência
< 50	< 0,3	< 0,35	Muito baixa
[50; 70]	[0,3; 0,4]	[0,35; 0,45[	Baixa
[70; 90]	[0,4; 0,5]	[0,45; 0,6[	Média
[90; 100]	[0,5; 0,7]	[0,6; 0,85[	Boa
[100; 90]	[0,7; 1,0]	[0,85; 1,0]	Alta
>90	>1	>1	Muito alta (excessiva)

As faixas de suficiência para Ca na camada de 20-50 cm são apresentadas na Tabela 7 (ALVES, 2012). Tais valores se mostraram bem inferiores aos apresentados na camada 0 a 20 cm de profundidade, podendo ser um indicativo de que talvez a camada superior seja responsável pelo suprimento de boa parte do Ca para a planta. Para as faixas de suficiência de Ca de 20 a 50 cm indica um nível de referência ótimo de 0,7 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>.

### O Magnésio (Mg)

O Mg é absorvido pelas plantas na forma de Mg<sup>2+</sup> e é o elemento que atua na clorofila, indispensável, portanto, na fotossíntese. É muito importante no metabolismo de carboidratos, estando presente em quase todas as enzimas de fosforilação. Além disso, o Mg é necessário para manter a integridade estrutural dos ribossomos (MARTINEZ et al., 2007).

De acordo com os resultados apresentados por Alves (2012) a faixa de suficiência boa e o nível ótimo foram 0,9 a 1,1 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup> e 1,1 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup> respectivamente.

Tabela 8 - Faixas de suficiência para Mg no solo (0 - 20 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais(ALVES, 2012).

chRM estimada produtividade (%)	Faixa de suficiência do Magnésio (Mg) cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Faixas de suficiências a partir do ponto médio das classes Magnésio (Mg) em cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Classificação da faixa de suficiência
< 50	< 0,6	< 0,65	Muito baixa
[50; 70]	[0,6; 0,7]	[0,65; 0,8[	Baixa
[70; 90]	[0,7; 0,9]	[0,8; 1,0[	Média
[90; 100]	[0,9; 1,1]	[1,0; 1,15[	Boa
[100; 90]	[1,1; 1,2]	[1,15; 1,2]	Alta
>90	>1,2	>1,2	Muito alta (excessiva)

Tabela 9 - Faixas de suficiência para Mg no solo (20-50 cm) sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais(ALVES, 2012).

chRM estimada produtividade (%)	Faixa de suficiência do Magnésio (Mg) cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Faixas de suficiências a partir do ponto médio das classes Magnésio (Mg) em cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Classificação da faixa de suficiência
< 50	< 0,6	< 0,65	Muito baixa
[50; 70]	[0,6; 0,7]	[0,65; 0,8[	Baixa
[70; 90]	[0,7; 0,9]	[0,8; 1,0[	Média
[90; 100]	[0,9; 1,1]	[1,0; 1,15[	Boa
[100; 90]	[1,1; 1,2]	[1,15; 1,2]	Alta
>90	>1,2	>1,2	Muito alta (excessiva)

### Alumínio (Al)

De acordo com Alves (2012) há na literatura diversas referências tratando o cafeeiro, de forma geral, como uma planta tolerante ao Al. Em geral, saturações de alumínio da ordem de 30% na camada superficial do solo (0-20 cm) não prejudicaram o desenvolvimento de raízes e parte aérea das variedades estudadas. No entanto, segundo Matiello (1991) citado por Alves (2012), o Al acima de 0,3 a 0,5 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>, é tóxico e prejudicial ao cafeeiro.

A Tabela 10 apresenta as faixas de suficiência de Alumínio no solo (0- 20 cm) de profundidade sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais (ALVES, 2012).

Tabela 10 - Faixas de suficiência para Al no solo (0-20 cm) de profundidade sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.

chRM estimada produtividade (%)	Faixa de suficiência do Alumínio (Al) cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Faixas de suficiências a partir do ponto médio das classes Alumínio (Al) em cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Classificação da faixa de suficiência
[100; 90]	[0,07; 0,08]	[0,075; 0,09[	Boa
[90; 70]	[0,08; 0,10]	[0,09; 0,12[	Média
[70; 50]	[0,10; 0,14]	[0,12; 0,14]	Alta
< 50	>0,14	>0,14	Muito Alta

De acordo com Alves (2012) Os resultados associando lavouras altamente produtivas ao teor de Al no solo, diverge do que é preconizado na literatura, faz-se necessário, então, considerar que, o cafeeiro apresenta tolerância ao Al até certas concentrações no solo que não prejudica o seu desenvolvimento, no entanto, para a obtenção de altas produtividades, esse elemento deve estar neutralizado, ou seja, seu teor no solo deve ser zero.

Tabela 11 - Faixas de suficiência de Al no solo (20 – 50 cm) de profundidade sob lavouras de café de alta produtividade em Minas Gerais.

chRM estimada produtividade (%)	Faixa de suficiência do Alumínio (Al) cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Faixas de suficiências a partir do ponto médio das classes Alumínio (Al) em cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	Classificação da faixa de suficiência
[100; 90]	[0,08; 0,09]	[0,085; 0,11[	Boa
[90; 70]	[0,09; 0,13]	[0,11; 0,19[	Media
[70; 50]	[0,13; 0,25]	[0,19; 0,25]	Alta
<50	>0,25	>0,25	Muito Alta

### Saturação por Base (V)

De acordo com Kupper (1982) citado por Alves (2012), acredita-se que uma saturação por bases (V) ao redor de 40% deve ser o valor mínimo para dar condições às raízes das plantas de absorver facilmente os nutrientes. Uma V de 60% pode ser considerada ideal e deve ser a meta para manter uma alta produtividade.

As classes de suficiência de Saturação por Base (V) para profundidade de 0 a 20 cm para o cultivo de café de alta produtividade são apresentadas de acordo com Alves (2012) na Tabela 12 e para a profundidade de 20 a 50 cm na Tabela 13.

Tabela 12 - Faixas de suficiência de Saturação por Base(V) no solo (0-20 cm) de profundidade sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.

chRM estimada produtividade (%)	Faixa de suficiência do Saturação por base (V)%	Faixas de suficiências de Saturação por base a partir do ponto médio das classes (V)%	Classificação da faixa de suficiência
< 50	< 13	<17,5	Muito baixa
[50; 70]	[13; 22]	[17,5; 28[	Baixa
[70; 90]	[22; 34]	[28; 42[	Média
[90; 100]	[34; 50]	[42; 58[	Boa
[100; 90]	[50; 66]	[58; 66]	Alta
>90	>66	>66	Muito alta (excessiva)

Tabela 13 - Faixas de suficiência de Saturação por Base (V) no solo (20-50 cm) de profundidade sob lavoura de café de alta produtividade em Minas Gerais.

chRM estimada produtividade (%)	Faixa de suficiência do Saturação por base (V)%	Faixas de suficiências de Saturação por base a partir do ponto médio das classes (V)%	Classificação da faixa de suficiência
< 50	< 7	< 7,5	Muito baixa
[50; 70]	[7; 8]	[7,5; 8,5[	Baixa
[70; 90]	[8; 11]	[8,5; 14,5[	Média
[90; 100]	[11; 18]	[14,5; 26[	Boa
[100; 90]	[18; 34]	[26; 34]	Alta
>90	>34	>34	Muito alta (excessiva)

### 2.8.3 Classes de suficiência do solo quanto ao teor dos principais nutrientes, para o cultivo de bananeira no Estado de Minas Gerais

A bananeira é uma planta de crescimento rápido que requer para seu desenvolvimento e produção, quantidades adequadas de nutrientes disponíveis no solo. Embora parte das necessidades nutricionais possa ser suprida pelos nutrientes contidos no próprio solo e pelos resíduos das colheitas, na maioria das vezes é necessário aplicar calcário e fertilizantes para

obtenção de produções economicamente rentáveis. A necessidade de aplicação de nutrientes para a variedade plantada depende de seu potencial, densidade populacional, estado fitossanitário e principalmente de balanço de nutrientes no solo e do sistema radicular que interferirá na absorção dos mesmos (EMBRAPA - MANDIOCA E FRUTÍFERAS, 2004).

O Potássio (K) e o nitrogênio (N) são os nutrientes mais absorvidos, necessários para o crescimento e produção da bananeira, seguidos pelo Magnésio (Mg) e pelo Cálcio (Ca). Em sequência com menor grau de absorção estão os Nutrientes Enxofre(S) e Fósforo (P) (EMBRAPA - MANDIOCA E FRUTÍFERAS, 2004).

Dos micronutrientes, o Boro (B) e o Zinco (Zn) são os mais absorvidos e em seguida o Cobre (Cu) (EMBRAPA - MANDIOCA E FRUTÍFERAS, 2004). O Quadro 1 apresenta as quantidades de Boro (B), Fósforo (P<sub>2</sub>O<sub>2</sub>) e Zinco (Zn) aplicados na cova de bananeira, com base na análise química do solo (EMBRAPA - MANDIOCA E FRUTÍFERAS, 2004).

Quadro 1 – Níveis de suficiência dos macronutrientes: Potássio (K), Fósforo(P), Nitrogênio(N), Cálcio (Ca), Magnésio (Mg) e Enxofre (S) e dos micronutrientes: Cobre (Cu), Zinco (Zn) e Boro (B) do solo e respectivos períodos de reposição no cultivo de bananeira.

<b>MACRONUTRIENTES</b>		
<b>Nutrientes-sigla</b>	<b>Faixa de suficiência</b>	<b>Período para reposição</b>
Potássio (K) em cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	[0,0; 0,15] [0,16; 0,30] [0,31;0,60] >0,60	Após 30 dias do plantio Após 60 dias do plantio Após 90 dias do plantio Após 120 a 360 dias
Fósforo (P) em mg/dm <sup>3</sup>	[0,0; 6,0] [6,1; 15] [15;30] >30	Após 30 dias do plantio Após 60 dias do plantio Após 90 dias do plantio Após 120 a 360 dias
Nitrogênio (N) em g/kg	[27;36]	Nível adequado
Cálcio (Ca) g/kg	[6,6; 12]	Nível adequado
Magnésio (Mg) em cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup> ou g/kg	>0,8 ou [1,6; 3,0]	Nível adequado
Enxofre (S) em g/kg	[1,6; 3,0]	Nível adequado
<b>MICRONUTRIENTES</b>		
<b>Micronutrientes(sigla)</b>	<b>Faixa de suficiência</b>	<b>Necessidade de reposição</b>
Cobre (Cu) em mg/dm <sup>3</sup>	[6,0; 30]	Nível adequado
Zinco (Zn) em mg/dm <sup>3</sup>	≥0,6	Nível adequado
Boro(B) em mg/dm <sup>3</sup> ou	≥ 0,21	Nível adequado

Fonte: Borges et al. (2002).

Recomenda-se que seja feita uma Avaliação anual da disponibilidade de nutrientes no solo e, caso seja necessário, aplicar adubo contendo *B* e *Zn*, ou adicionar 50g/cova de *FTE BR12* de acordo com as dosagens indicadas, que podem ser encontradas no livro “O cultivo da bananeira” (EMBRAPA - MANDIOCA E FRUTÍFERAS, 2004).

### **3. MATERIAIS E MÉTODOS**

As aplicações propostas neste trabalho apresenta um estudo geoestatístico utilizando como metodologia a Krigagem Indicativa para geração de mapas da região de Arapongas-MG, descrita na Seção 3.1, utilizando dados amostrais de variáveis de solo referentes aos macro e micronutrientes, saturação por alumínio, saturação por base, pH e matéria orgânica.

Estabeleceu-se como critério para aplicação da metodologia, pontos de corte para cada variável de solo seguindo literaturas especializadas em classificação de solo e cultivo utilizando os manejos de consorciação e rotação de culturas de acordo com Alves (2012); EMBRAPA CERRADOS (2007); EMBRAPA - Soja (2004); EMBRAPA - Mandioca e frutíferas (2004); EMBRAPA (1999); IBGE (2006) e Montezano e Peil (2006).

#### **3.1 Descrição do Experimento**

As variáveis utilizadas para análise e seus respectivos pontos de corte estão apresentadas a seguir, nas Tabelas 1, 2 e 3 (Seção 3.2) cujos pontos de cortes foram baseados nos valores constantes nas Tabelas 1 a 13 (Seção 2.8.2) e no Quadros 1 (Seção 2.8.3). Para a análise geoestatística foram realizadas 141 observações georreferenciadas na área indicada.

Os dados do solo foram medidos em uma fazenda localizada em Araponga, estado de Minas Gerais, Brasil (20°42'33 "S, 42°34'17" W, altitude média de 913 m de altitude). A fazenda tem 86 hectares plantados com *Coffea arabica* L. e está localizada em uma área montanhosa cujo solo é classificado como Latossolo Vermelho distrófico (STAFF SOLOS, 2006 apud VALENTE et al., 2012).

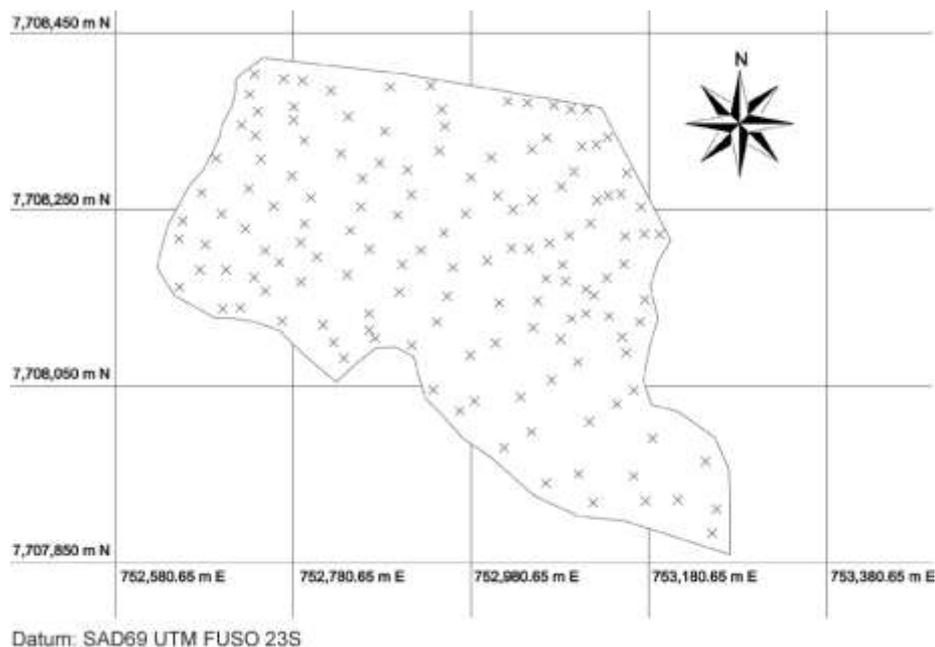


Figura 27- Mapa da área com as coordenadas geográficas e representação dos pontos amostrados.

Em cada ponto, uma amostra de solo foi coletado para medir as propriedades químicas do solo. Para cada ponto de dados, três amostras simples foram coletadas para compor a amostra e baseou na média simples dos resultados para cada variável analisada. As propriedades de fertilidade do solo foram baseadas nas variáveis: Matéria Orgânica (MO), pH, Fósforo (P), Potássio (K), Cálcio (Ca), Magnésio (Mg), alumínio (Al) e saturação por base(V) para a cultura de café e Fósforo (P), Potássio (K), Cálcio (Ca), Magnésio (Mg), Nitrogênio (N), Enxofre (S), Cobre (Cu), Zinco (Zn) e Boro (B) para a cultura de bananeira.

Cada ponto de amostragem foi georreferenciado utilizando os Promark 3 DGPS fabricado por Magellan. Para a correção diferencial, dados da *Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo* (RBMC) foram utilizados. *GNSS* software solução (desenvolvido pela Magellan) foi utilizado para processar os dados.

Estes dados foram analisados com o uso dos softwares *GS+7.0* (GAMMA DESIGN SOFTWARE, 2012) e *ARCGIS-10* (ESRI, 2010), onde a análise geoestatística foi realizada de acordo com os pontos de Corte para cada substância analisada relativas ao cultivo de café e bananeira seguindo-se os cortes de acordo com os níveis de suficiência constantes nas Tabelas 1 a 13 (Seção 2.8.2) e Tabela 1 (Seção 2.8.3).

Os Semivariogramas e mapas foram gerados no software GS+7.0 (GAMMA DESIGN SOFTWARE) e em seguida, por meio de um arquivo da imagem gerado no formato *grd* foi transportado para o software *ARCGIS-10* (ESRI, 2010), onde foram feitas as álgebras dos mapas para identificar, por meio de uma matrizes de pixels, as áreas que são intersecções propícias ao cultivo das duas culturas: café e bananeira.

Para a seleção das áreas propícias a consorciação das duas culturas foi levado em consideração os locais onde exigia menor quantidade de reposição de nutrientes ou não necessitava de reposição destes para o cultivo das duas culturas, visando com isto a redução dos custos de produção.

O enfoque prático deste trabalho baseou em apresentar um planejamento agrícola para consorciação de bananeira em uma área cultivada com café por meio de mapas de Krigagem Indicativa das áreas analisadas. Para isto, paralelo a análise de solo para o cultivo de café, foi feita uma análise de solo na mesma área para identificar as subáreas mais favoráveis ao cultivo consorciado de bananeira sem necessidade de grandes custos com adubação.

Para efetuar as análise utilizando a Krigagem Indicativa, foi adotado os pontos de corte para os principais nutrientes do solo, Fósforo (P), Potássio (K), Cálcio (Ca), Magnésio (Mg) e Zinco (Zn), Matéria Orgânica(MO), Saturação por Base (V), Saturação por Alumínio (SAT/Al), Acidez (pH), cobre (Cu) e Enxofre (S) de acordo com informações da EMBRAPA - Mandioca e Frutíferas (2004) e Alves (2012) para o cultivo de bananeira e café, respectivamente.

Para as análises conjuntas dos mapas individuais utilizou-se como corte as áreas que se apresentavam iguais ou acima de a 60%, 70% e 80% de probabilidade para o (os) níveis de fertilidade adotados com o objetivo de identificar as melhores áreas para o manejo.

### **3.2 Pontos de Corte por Variáveis e por Cultura**

A seguir estão apresentados os pontos de corte para cada variável de solo analisada de acordo com Alves (2012) e EMBRAPA - Mandioca e Frutíferas (2004) para as culturas de

café( Tabela 14 e 15) e bananeira (Tabela 16) analisadas a partir de amostras a profundidades de 0 a 20 cm e de 20 a 50 cm, bem como as transformações por variáveis.

Tabela 14 - Variáveis altimétrica e de solo a uma profundidade de (0 - 20 cm) e os respectivos pontos de corte definido para o cultivo de café em MG.

<b>CAFÉ</b>			
Variável (Símbolo)	Nível de suficiência	Escala de valores de corte	Transformação binária
Fósforo (P)	Bom	[1,2; 2,7] mg/dm <sup>3</sup>	1, se $1,2 \leq P \leq 2,7$ 0, se $P < 1,2$ ou $P > 2,7$ .
Potássio (K)	Bom	[65; 84] mg/dm <sup>3</sup>	1, se $65 \leq K \leq 84$ 0, se $K < 65$ ou $K > 84$ .
Mat. Orgânica (MO)	Bom	[3,6; 5,0] dag/kg	1, se $3,6 \leq MO \leq 5$ . 0, se $MO < 3,6$ ou $MO > 5$ .
Cálcio (Ca)	Bom	[2,25; 3,0] cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	1, se $2,25 \leq Ca \leq 3$ . 0, se $Ca < 2,25$ ou $Ca > 3,0$ .
Magnésio (Mg)	Bom	[1,0; 1,15] cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	1, se $1,0 \leq Mg \leq 1,15$ 0, se $Mg < 1,0$ ou $Mg > 1,15$ .
Alumínio (Al)	Bom	$Al \leq 0,08$ cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	1, se $Al \leq 0,08$ 0, se $Mg > 0,08$
Acidez/Alcal.(pH)	Bom	[5,2; 5,6]	1, se $5 \leq pH \leq 5,4$ 0, se $pH < 5$ ou $pH > 5,4$ .
Sat. Por Base (V)	Bom	[28; 42] dag/kg	1, se $28 \leq V \leq 42$ 0, se $V < 28$ ou $V > 42$ .
Sat. Por Alumínio (Sat/Al)	Bom	$\leq 30 \%$	1, se $Sat/Al < 30\%$ 0, se $Sat/Al > 30\%$

Tabela 15 - Variáveis de solo a uma profundidade de (20 - 50 cm) e os respectivos pontos de corte definido para o cultivo de café em MG.

<b>CAFÉ</b>			
Variável (Símbolo)	Nível de suficiência	Escala de valores de corte	Transformação binária
Fósforo (P)	Bom	[1,2; 2,7] mg/dm <sup>3</sup>	1, se $1,2 \leq P \leq 2,7$ 0, se $P < 1,2$ ou $P > 2,7$ .
Potássio (K)	Bom	[33; 54] mg/dm <sup>3</sup>	1, se $33 \leq K \leq 54$ 0, se $K < 33$ ou $K > 54$ .
Matéria Orgânica(MO)	Bom	[1,6; 2,4] dag/kg	1, se $1,6 \leq MO \leq 2,4$ 0, se $MO < 1,6$ ou $MO > 2,4$ .
Cálcio (Ca)	Bom	[0,5; 0,7] cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	1, se $0,5 \leq Ca \leq 0,7$ 0, se $Ca < 0,5$ ou $Ca > 0,7$ .
Magnésio (Mg)	Bom	[0,9; 1,1] cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	1, se $0,9 \leq Mg \leq 1,1$ 0, se $Mg < 0,9$ ou $Mg > 1,1$ .
Alumínio (Al)	Bom	[0,08; 0,09] cmol <sub>c</sub> /dm <sup>3</sup>	1, se $0,08 \leq Al \leq 0,09$ 0, se $Mg < 0,08$ ou $Mg > 0,09$ .

Acidez/Alcal.(pH)	Bom	$\leq 4,0$	1, se $\text{pH} \leq 4,0$ 0, se $\text{pH} > 4$
Sat. Por Base (V)	Bom	[42; 58] dag/kg	1, se $42 \leq V \leq 58$ 0, se $V < 42$ ou $V > 58$ .

Tabela 16 - Variáveis de altitude e de solo e respectivos pontos de corte definidos para o cultivo de bananeira em Minas Gerais (EMBRAPA - MANDIOCA E FRUTÍFERAS, 2004).

<b>BANANEIRA</b>			
Variável (Símbolo)	Nível de suficiência	Escala de valores de corte	Transformação binária
Fósforo (P) (Mhelich)	Bom	$>30 \text{ mg/dm}^3$	1, se $P > 30$ 0, se $P \leq 30$ .
Boro (B) (água quente)	Bom	$>0,21 \text{ mg/dm}^3$	1, se $B > 0,21$ 0, se $B \leq 0,21$
Zinco (Zn) (DTPA)	Bom	$>1,0 \text{ mg/dm}^3$	1, se $\text{Zn} > 1,0$ 0, se $\text{Zn} < 1,0$ .
Potássio (K)	Bom	$>0,18 \text{ mol}_c/\text{dm}^3$	1, se $K > 0,18$ 0, se $K \leq 0,18$
Magnésio(Mg)	Bom	$>1.0 \text{ cmol/dm}^3$	1, se $\text{Mg} > 1.0$ 0, se $\text{Mg} \leq 1.0$
Cálcio (Ca)	Bom	$>0.6 \text{ dag/kg}$	1, se $\text{Ca} > 0.6$ 0, se $\text{Ca} \leq 0.6$
pH	Bom	[5,75; 6,0]	1, se $5,75 \leq \text{pH} \leq 6,0$ 0, $\text{pH} < 5,75$ ou $\text{pH} > 6,0$ .

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Segue abaixo os resultados referentes as análises de solo para as variáveis de solo já descritas anteriormente nas Tabelas 14, 15 e 16, para o cultivo de café e para o cultivo de bananeira onde é possível identificar as peculiaridades do solo para cada cultura. Os resultados das análises geoestatística basearam no estudo dos semivariogramas e dos mapas de krigagem Indicativa para cada variável por cultura.

### 4.1 RESULTADOS

#### 4.1.1 Resultados obtidos com a krigagem indicativa para o cultivo de café.

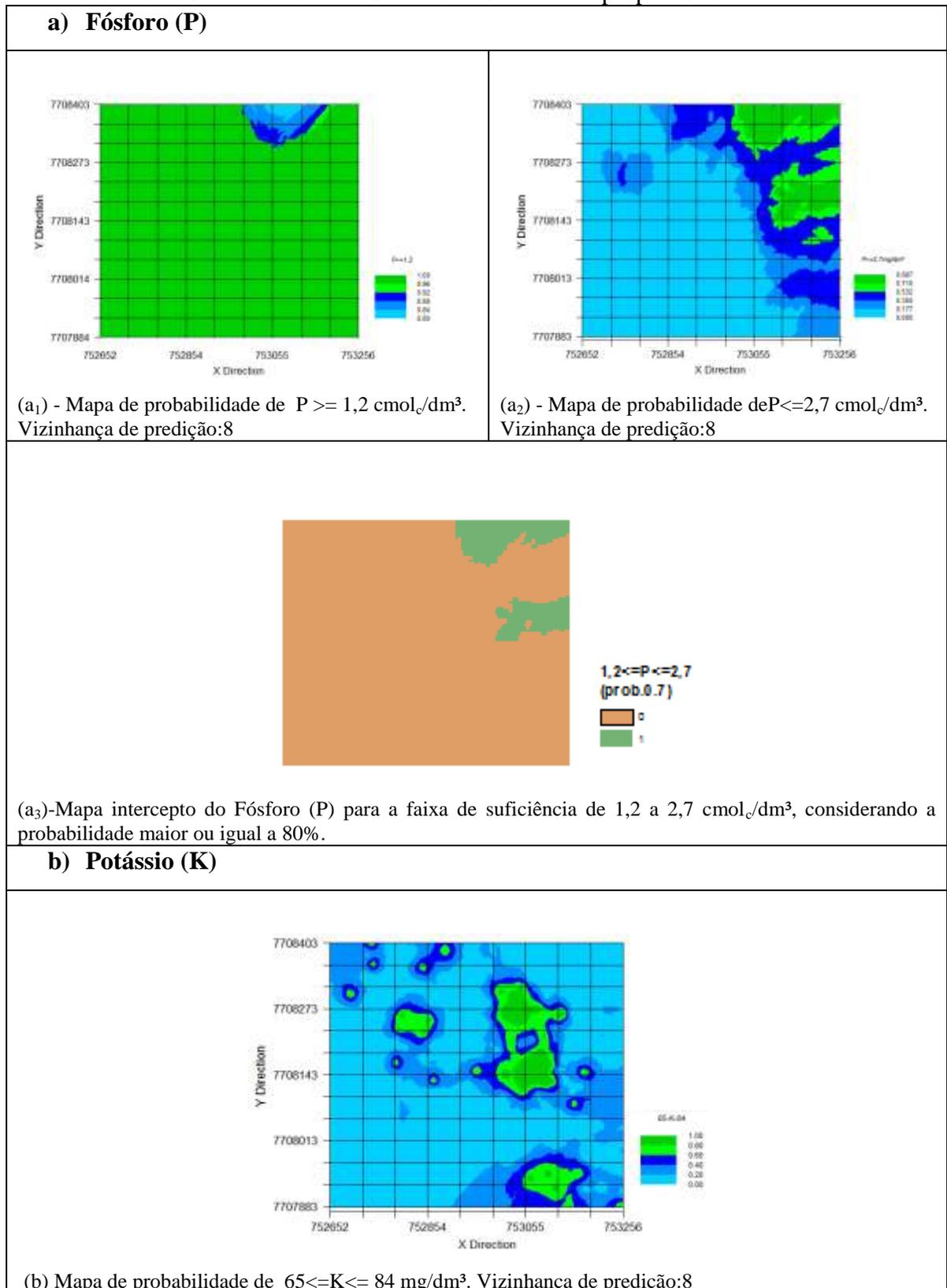
Abaixo estão representados os parâmetros obtidos nos semivariogramas ajustados para cada variável analisada de acordo com o ponto de corte que propiciam ao cultivo de café de qualidade e alta produtividade.

Tabela 1- Resultados relativos aos parâmetros dos semivariogramas do quadro 1 (Anexo 1) relativos às variáveis ajustadas de acordo com os níveis de suficiência da Tabela 1 (seção 3.2) para o café.

Variável	Níveis de corte	Mod. Aj.	$C_0$	$C+C_0$	IDE*	Alc. (A)	$R^2$	RSS
Fósforo (P)	$\geq 1,2$	Gau.	0,003	0,118	0,783	433,3	0,88	$1,48 \times 10^{-3}$
	$\leq 2,7$	Gau.	0,015	0,245	0,374	549,7	0,512	$4,66 \times 10^{-3}$
Potássio(K)	[65;84]	Exp.	0,027	0,202	0,866	48,6	0,316	$3,72 \times 10^{-3}$
M.Org.(MO)	[3,6;5,0]	Exp.	0,024	0,223	0,892	41,7	0,504	$1,78 \times 10^{-3}$
Cálcio (Ca)	[2,25;3]	Gau.	0,044	0,180	0,754	55,9	0,485	$4,6 \times 10^{-3}$
Magnésio (Mg)	$\geq 1$	Exp.	0,066	0,237	0,723	31,8	0,642	$3,79 \times 10^{-4}$
	$\leq 1,15$	Gau.	0,016	0,094	0,831	75,4	0,455	$3,04 \times 10^{-3}$
Acid./Alc. (pH)	[5,2;5,6]	Exp.	0,023	0,217	0,892	51,3	0,531	$2,51 \times 10^{-3}$
	$\leq 5,6$	Sph.	0,120	0,242	0,502	87,8	0,704	$2,74 \times 10^{-3}$
Sat. Por Base (V)	[28;42]	Exp.	0,107	0,223	0,894	58,03	0,255	$2,49 \times 10^{-3}$
	$\geq 28$	Exp.	0,017	0,207	0,92	45,00	0,644	$1,34 \times 10^{-3}$
Alumínio	$\leq 0,08$	Exp.	0,025	0,243	0,896	51,00	0,659	$2,08 \times 10^{-3}$
Sat./Al	$\leq 25\%$							

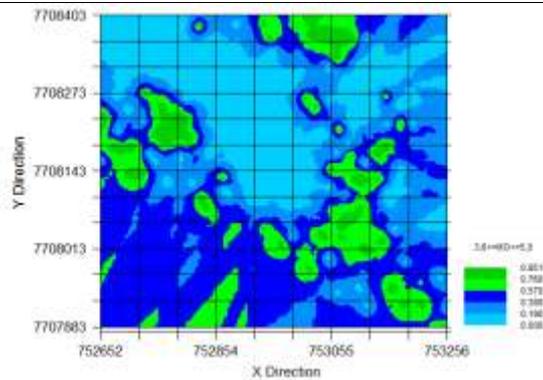
Nota: \*IDE: Índice de Dependência Espacial (ZIMBACK, 2001).

Quadro 1- Mapas de Probabilidades gerados por meio de Krigagem Indicativa relativos às variáveis analisadas de acordo com as faixas de suficiência propícias ao cultivo de café.



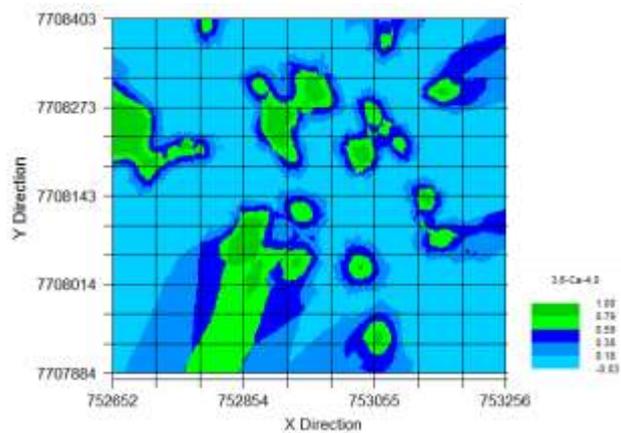
**Continuação...**

**c) Matéria Orgânica (MO)**



(c) - Mapa de probabilidade de  $3,6 \leq MO \leq 5$  dag/kg. Vizinhança de predição:8

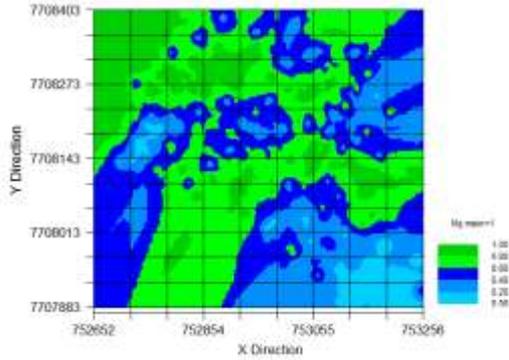
**d) Cálcio (Ca)**



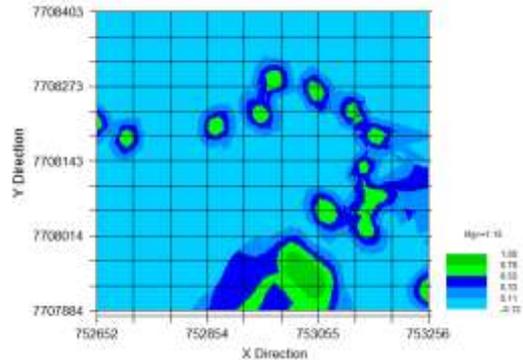
(d)- Mapa de probabilidade de  $3,6 \leq Ca \leq 4$  cmol<sub>e</sub>/dm<sup>3</sup>. Vizinhança de predição:8.

Continuação...

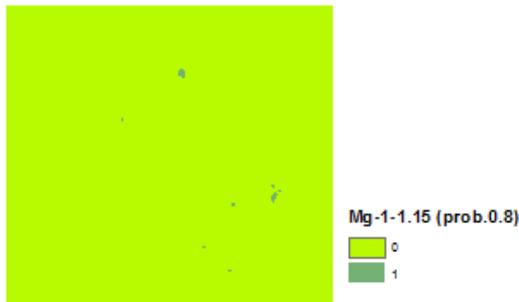
**e) Magnésio (Mg)**



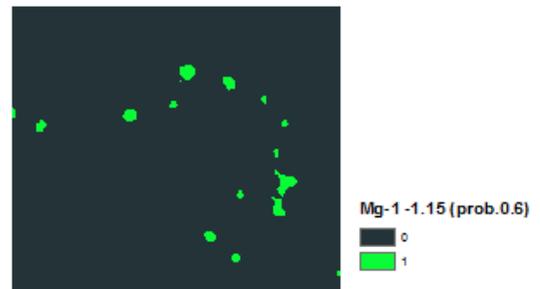
(e<sub>1</sub>) - Mapa de probabilidade de  $Mg \geq 1,0$   $cmol/dm^3$ . Vizinhança de predição:8.



(e<sub>2</sub>) - Mapa de probabilidade de  $Mg \leq 1,15$   $cmol/dm^3$ . Vizinhança de predição:8.

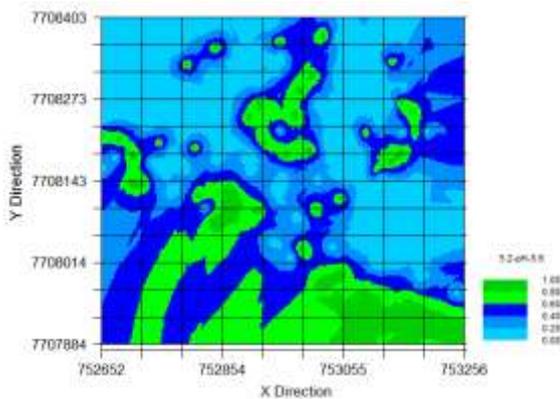


(e<sub>3</sub>) - Mapa intercepto do Magnésio (Mg) para a faixa de suficiência de 1,0 a 1,15  $cmol/dm^3$ , com a probabilidade maior ou igual a 80%.

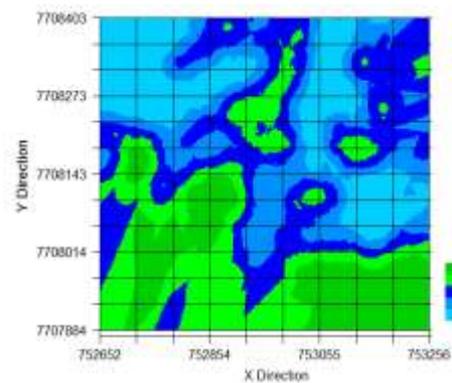


(e<sub>4</sub>) - Mapa intercepto do Magnésio (Mg) para a faixa de suficiência de 1,0 a 1,15  $cmol/dm^3$ , com a probabilidade maior ou igual a 60%.

**f) Acidez/ Alcalinidade (pH)**



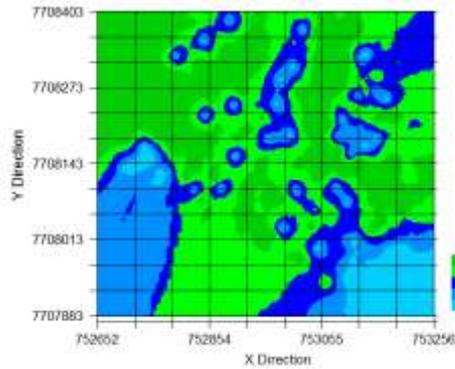
(f<sub>1</sub>) - Mapa de probabilidade de  $5,2 \leq pH \leq 5,6$ . Vizinhança de predição:8



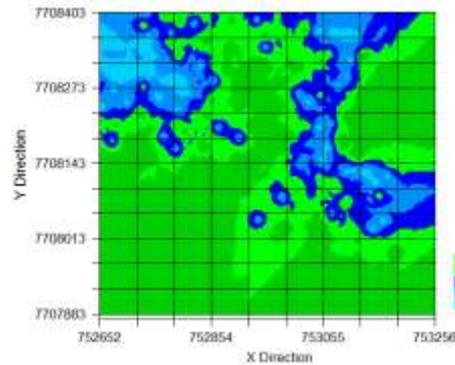
(f<sub>2</sub>) - Mapa de probabilidade de  $pH \leq 5,6$ . Vizinhança de predição:12

Continuação

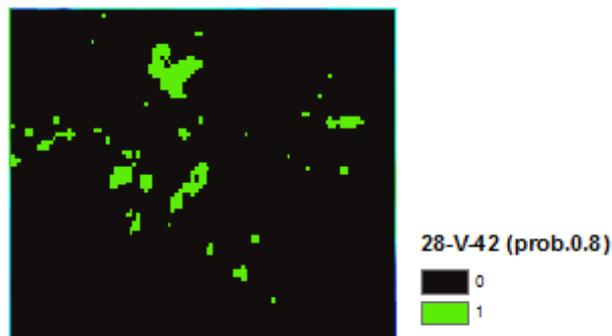
### g) Saturação por Base (V)



(g<sub>1</sub>)- Mapa de probabilidade de  $V \geq 28\%$ .  
Vizinhança de predição:8

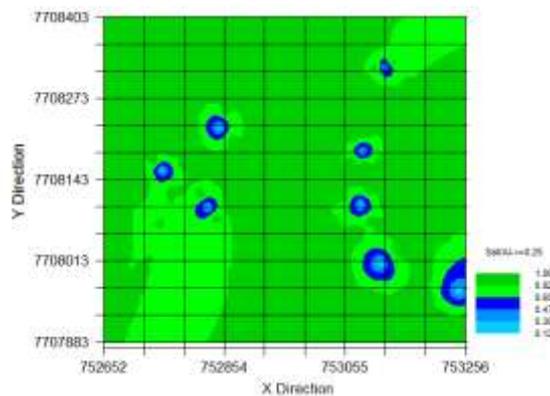


(g<sub>2</sub>)- Mapa de probabilidade de  $V \leq 42\%$ .  
Vizinhança de predição:8



(g<sub>3</sub>) - Mapa intercepto de Saturação por Base (V) para a faixa de suficiência de 28 a 42%, considerando a probabilidade maior ou igual a 80%.

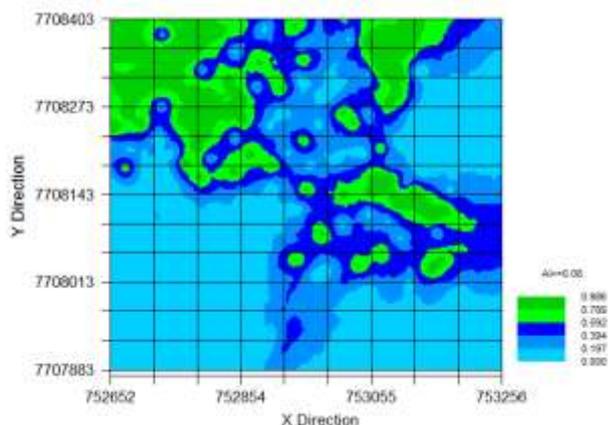
### h) Saturação por alumínio (Sat/Al)



(h) – Mapa de probabilidade de Saturação por Alumínio (Sat/Al)  $\leq 0,25$ .

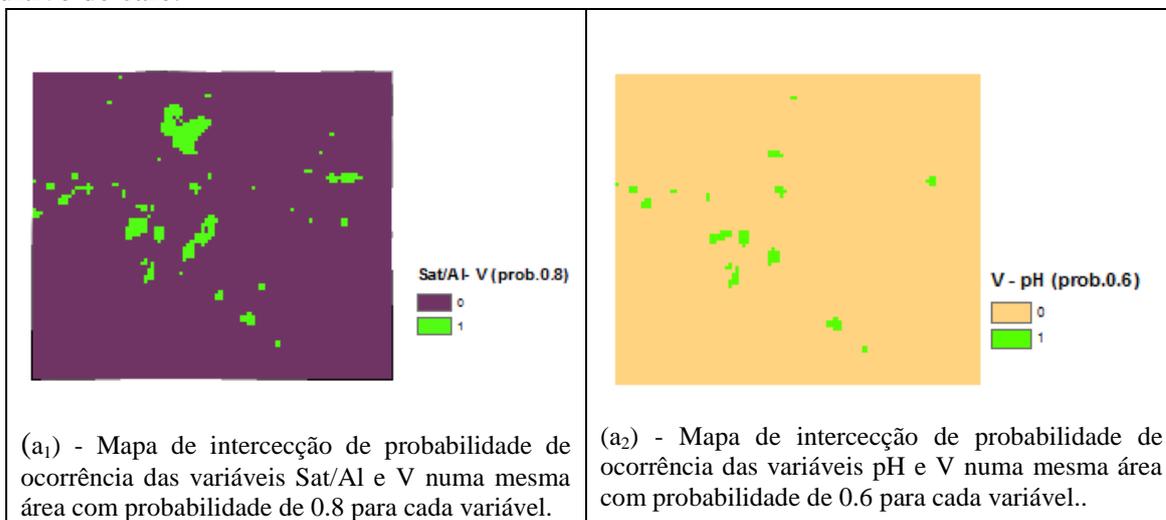
Continuação

**i) Alumínio (Al)**

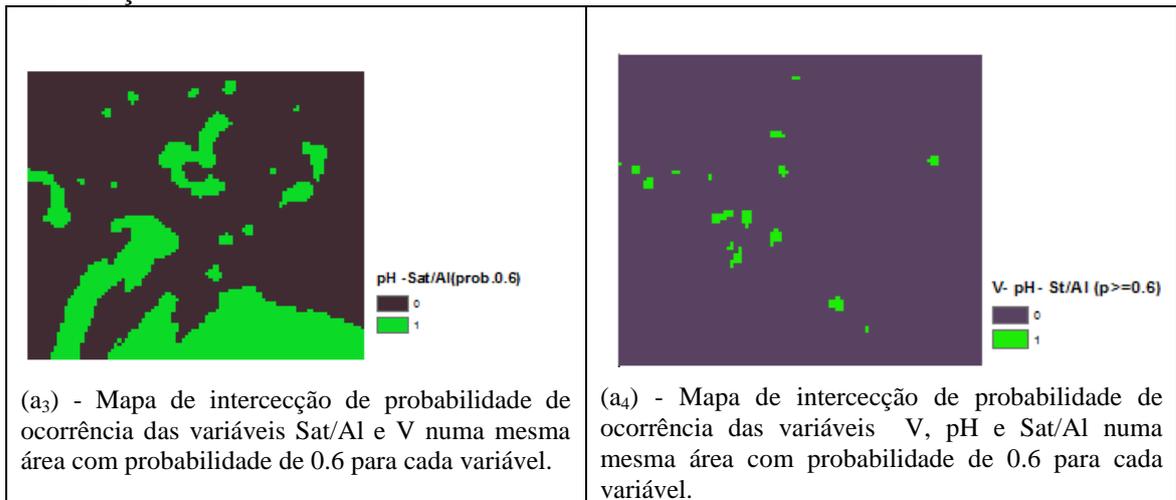


(i) – Mapa de probabilidade de Alumínio (Al)  $\leq 0,08$ .

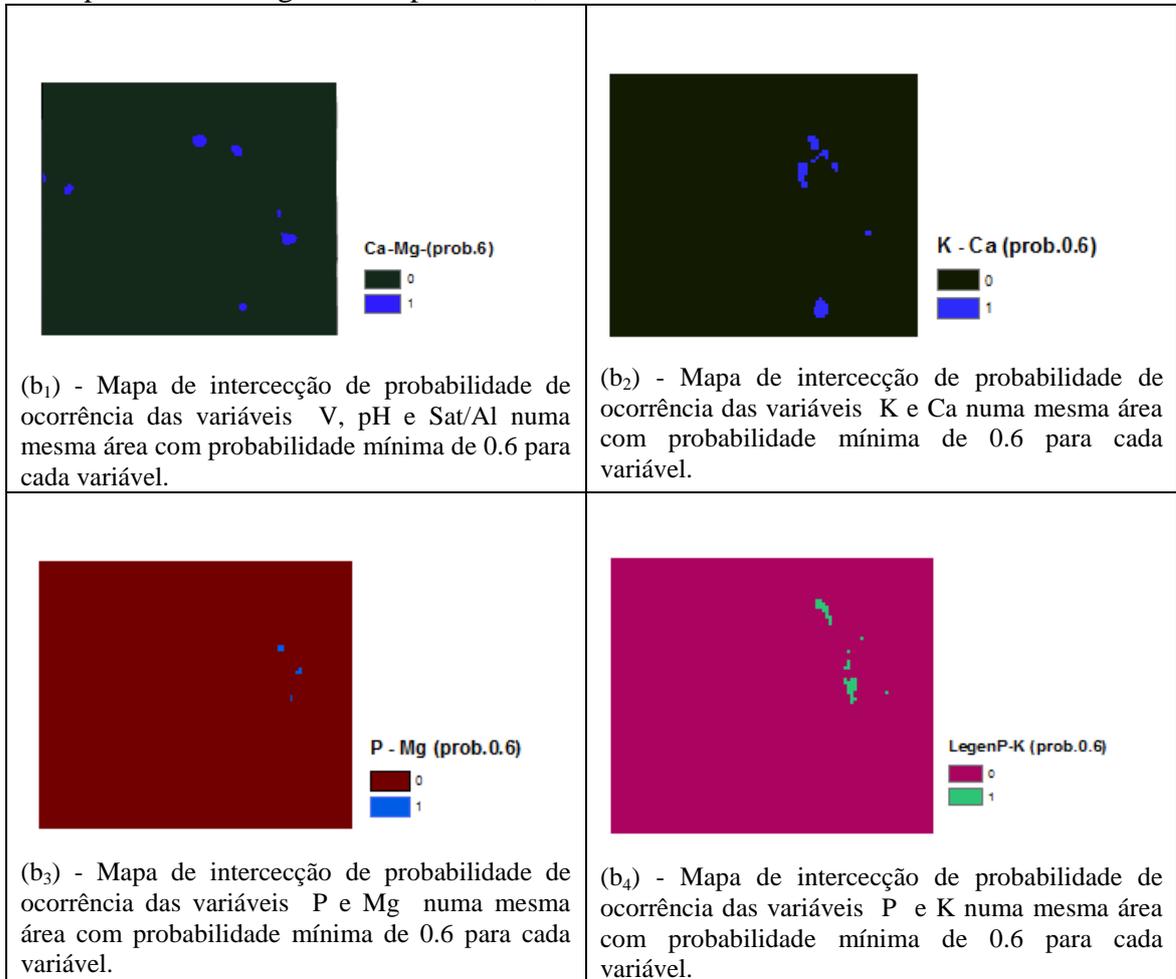
Quadro 2- Mapas de probabilidades conjuntas de ocorrências das variáveis analisadas, gerados a partir dos mapas individuais de cada variável do Quadro 1 (Seção 4.1.1) de acordo com os níveis de cortes constante na Tabela 1 (Seção 3.2) por grupo de variáveis relativas ao cultivo de café.



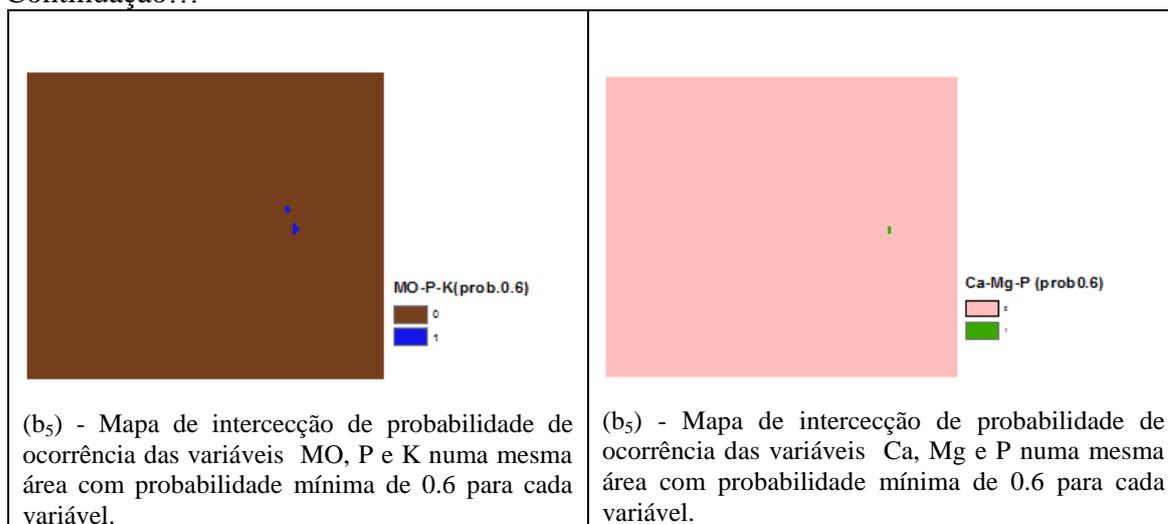
Continuação...



a) Mapas das subáreas de intersecção para o intervalo de suficiência para o cultivo de café, das variáveis: pH, Saturação por Base (V) e Saturação por Alumínio (Sat/Al) com probabilidade igual ou superior a 0, 6 e 0.8.



Continuação...



b) Mapas das subáreas de intersecção para o intervalo de suficiência para o cultivo de café, das variáveis: Cálcio (Ca), Potássio (K), Magnésio (Mg), Fósforo (P) e Matéria Orgânica (MO), com probabilidade igual ou superior a 0.6.

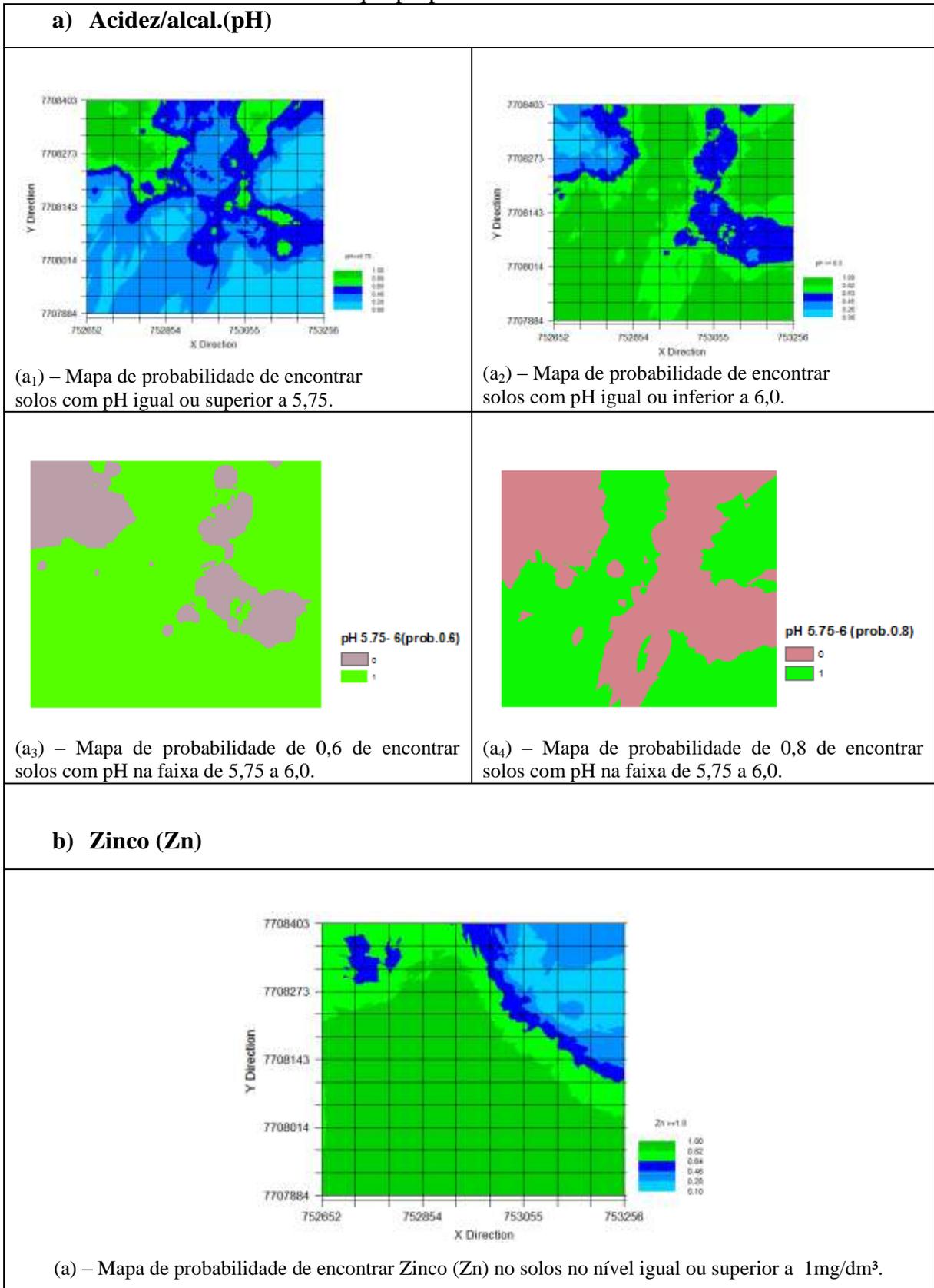
#### 4.1.2 Resultados obtidos com o uso da krigagem Indicativa para as variáveis de solos constantes na Tabela 3 (Seção 3.2) propícias ao cultivo de bananeira

Abaixo estão representados os parâmetros obtidos nos semivariogramas ajustados para cada variável analisada de acordo com o ponto de corte que propiciam ao cultivo de bananeira de qualidade e alta produtividade.

Tabela 17 - Resultados relativos aos parâmetros dos semivariogramas ajustados para as variáveis contidas na Tabela 3 (Seção 3.2) de acordo com as faixas de suficiência para o Cultivo de bananeira.

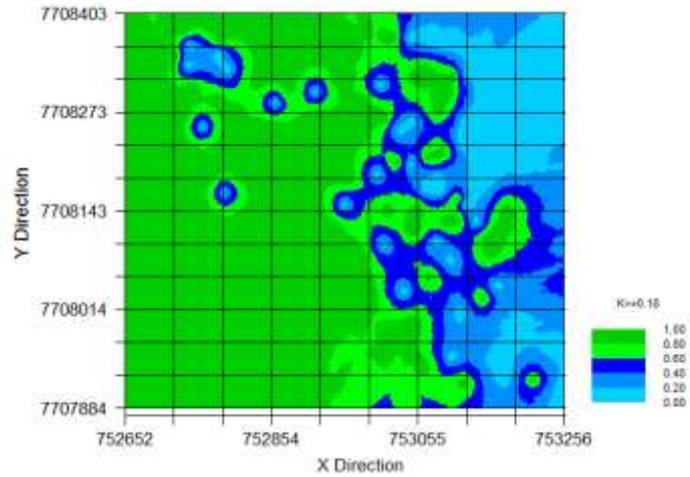
Variável	Níveis de corte	Mod. Aj.	$C_0$	$C+C_0$	IDE	Alc. (A)	$R^2$	RSS
Ph	$\geq 5,75$	Exp.	0,139	0,250	0,442	78,5	0,36	$2,88 \times 10^{-3}$
	$\leq 6,0$	Exp.	0,106	0,212	0,422	54,0	0,16	$3,26 \times 10^{-3}$
Zinco (Zn)	$\geq 1,0$	Gau.	0,122	0,246	0,502	429,1	0,872	$2,74 \times 10^{-3}$
Potássio(P)	$> 0,18$	Exp.	0,022	0,215	0,90	68,7	0,421	$7,46 \times 10^{-3}$
Magnésio (Mg)	$\geq 1$	Exp.	0,022	0,235	0,905	29,1	0,625	$3,79 \times 10^{-4}$
Cálcio (Ca)	$\geq 0,6$	Exp.	0,017	0,232	0,929	56,10	0,865	$8,50 \times 10^{-4}$

Quadro 3- Mapas de Krigagem Indicativa relativos às variáveis analisadas de acordo com as faixas de suficiência dos nutrientes que propiciam ao cultivo de bananeira.



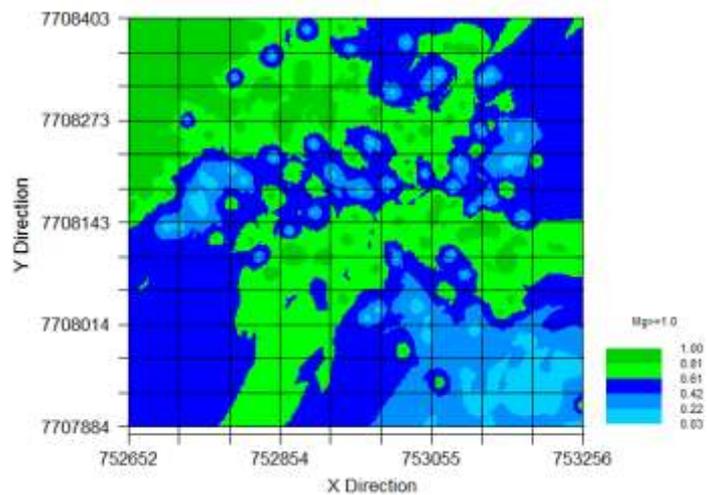
Continuação

**c) Potássio (K)**



(c) – Mapa de probabilidade de encontrar Potássio (K) no solos no nível igual ou superior a 0,18 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>.

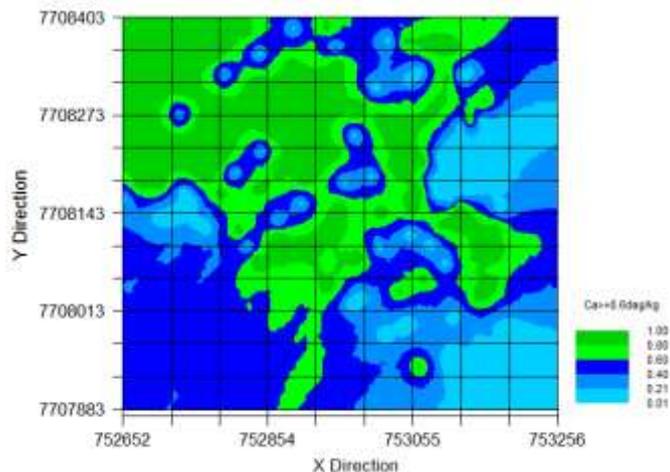
**d) Magnésio (Mg)**



(d) – Mapa de probabilidade de encontrar Magnésio (Mg) no solo no nível igual ou superior a 1,0 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>.

Continuação

**e) Cálcio (Ca)**



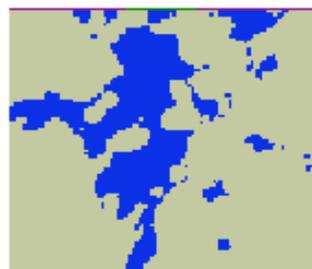
(e) – Mapa de probabilidade de encontrar Cálcio (Ca) no solo no nível igual ou superior a 0,6 dag/Kg.

Quadro 4- Mapas de probabilidades de ocorrências do conjunto das variáveis analisadas de acordo com os níveis de cortes constante na Tabela 3(Seção 3.2) por agrupamento de variáveis relativas ao cultivo de bananeira.



**pH -Ca-K (prob.0.6)**  
0  
1

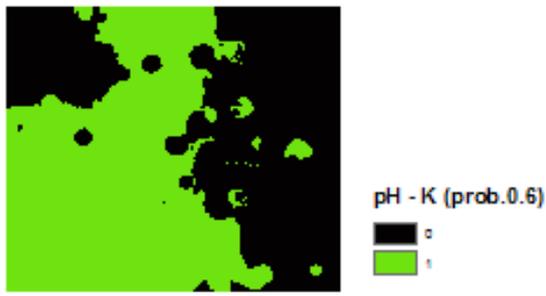
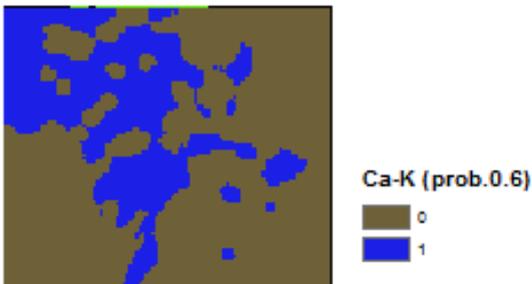
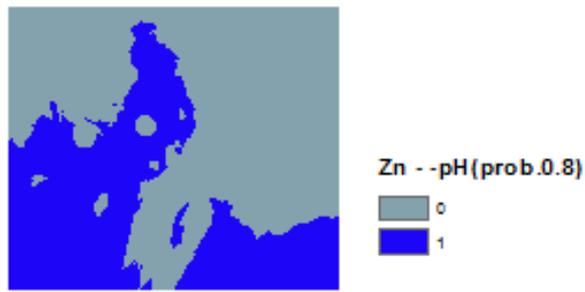
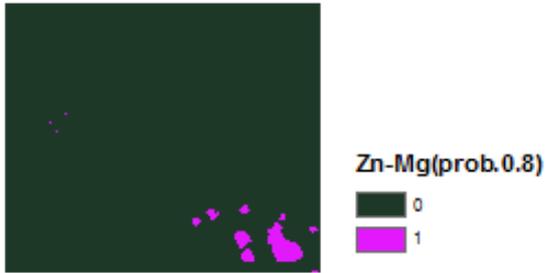
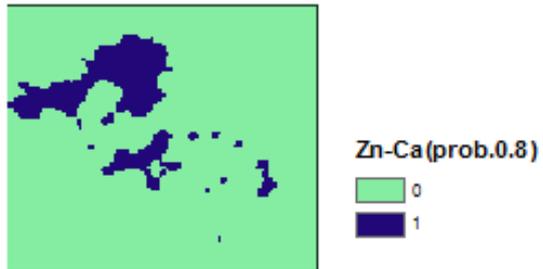
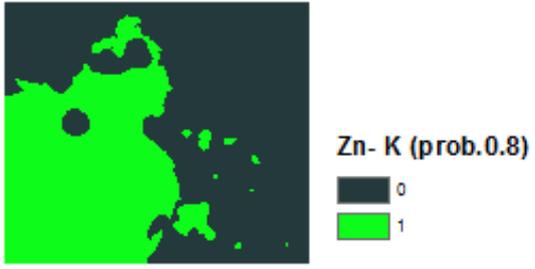
(a<sub>1</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis pH, Ca e K numa mesma área com probabilidade de 0.6 para cada variável.



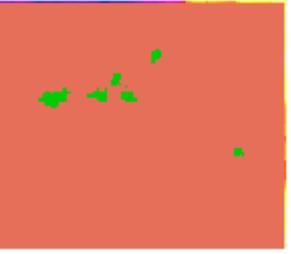
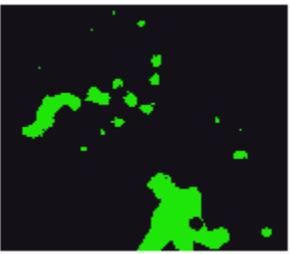
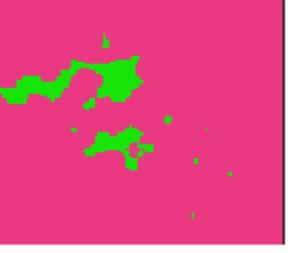
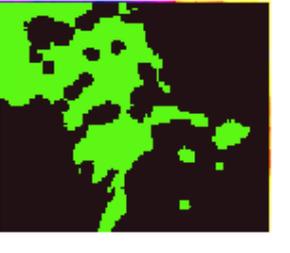
**pH - Ca- (prob.0.6)**  
0  
1

(a<sub>2</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis pH e Ca numa mesma área com probabilidade de 0.6 para cada variável.

Continuação

 <p>(a<sub>3</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis pH e K numa mesma área com probabilidade de 0.6 para cada variável.</p>	 <p>(a<sub>4</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Ca e K numa mesma área com probabilidade de 0.6 para cada variável.</p>
 <p>(a<sub>5</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Zn e pH numa mesma área com probabilidade de 0.8 para cada variável.</p>	 <p>(a<sub>6</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Zn e Mg numa mesma área com probabilidade de 0.8 para cada variável.</p>
 <p>(a<sub>7</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Zn e Ca numa mesma área com probabilidade de 0.8 para cada variável.</p>	 <p>(a<sub>8</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Zn e K numa mesma área com probabilidade de 0.8 para cada variável.</p>
<p>a) Mapas das subáreas de intersecção de grupos de variáveis no intervalo de suficiência para o cultivo de bananeira, para as variáveis: Cálcio (Ca), Potássio (K), Magnésio (Mg), Acidez/alc.(pH) e Zinco (Zn), com probabilidade iguais ou superior a 0.6 e 0,8.</p>	

Continuação

 <p>Ca-K-Zn-Mg (p.0.6)</p> <p>0 1</p>	 <p>Zn-Ca-K -ph(prob.0.8)</p> <p>0 1</p>
<p>(b<sub>1</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Ca, K, Zn e Mg numa mesma área com probabilidade de 0.6 para cada variável.</p>	<p>(b<sub>2</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Zn, Ca, K e pH numa mesma área com probabilidade de 0.8 para cada variável.</p>
 <p>Ca-K-Mg (p.0.6)</p> <p>0 1</p>	 <p>K-Zn-Mg (Prob.0.6)</p> <p>0 1</p>
<p>(b<sub>3</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Ca, K e Mg numa mesma área com probabilidade de 0.6 para cada variável.</p>	<p>(b<sub>4</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis K, Zn, e Mg numa mesma área com probabilidade de 0.6 para cada variável.</p>
 <p>Zn-Ca-K (prob.0.8)</p> <p>0 1</p>	 <p>Ca-K-Zn (prob.0.6)</p> <p>0 1</p>
<p>(b<sub>5</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Zn, Ca e K numa mesma área com probabilidade de 0.8 para cada variável.</p>	<p>(b<sub>6</sub>) - Mapa de intersecção de probabilidade de ocorrência das variáveis Ca, K e Zn numa mesma área com probabilidade de 0.6 para cada variável.</p>
<p>b) Mapas das subáreas de intersecção de grupos de três e quatro variáveis no intervalo de suficiência para o cultivo de bananeira, para as variáveis: Cálcio (Ca), Potássio (K), Magnésio (Mg), Acidez/alc.(pH) e Zinco (Zn), com probabilidade iguais ou superior a 0.6 e 0,8.</p>	

## 4.2 DISCUSSÃO

### 4.2.1 Resultados obtidos dos semivariogramas e mapas de probabilidade de áreas para os nutrientes (P, K, Ca, Mg, pH, V, SAT/Al e MO) e seus níveis de suficiência para o cultivo de café

De acordo com os valores obtidos nas amostras e os pontos de cortes estabelecidos nas Tabelas 1 e 2 (seção 3.2), para as variáveis em que não foi possível ajustar os semivariogramas, com o propósito de facilitar o ajuste foi utilizado os pontos médios das classes de suficiências considerada “boa” e “alta”, respectivamente, para os limites inferior e superior do intervalo de suficiência. Em particular, para o elemento Fósforo (P) utilizou-se recomendação de EMBRAPA - Café consorciado (2009) que obteve o melhor ajuste do semivariograma, utilizando como limites inferior e superior do intervalo de suficiência de 1,2 a 2,7 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>.

Os resultados obtidos pelos semivariogramas apontaram: para o Fósforo foi utilizado dois pontos de corte e ajustou dois modelos de semivariogramas, sendo para o primeiro ponto de corte considerou os valores  $\geq 1,2$  mg/dm<sup>3</sup> o qual ajustou o modelo Gaussiano com IDE forte de 0,783 e alcance 433,3 metros enquanto que para o ponto de corte para valores  $\leq 2,7$  m/dm<sup>3</sup>, ajustou o modelo Gaussiano com IDE fraco de 0,374 e alcance de 549,7 metros.

Para o nutriente Potássio (K) no intervalo de [65;84] mg/dm<sup>3</sup> ajustou o modelo exponencial com IDE forte de 0,87 e alcance de 48,6 metros.

A Matéria Orgânica (MO) no intervalo de 3,6 a 5 dag/kg ajustou ao modelo exponencial com IDE forte de 0,89 e alcance de 41,7 metros.

O Cálcio (Ca) no intervalo de 2,25 a 3 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup> ajustou o modelo Gaussiano com IDE forte de 0,75 e alcance de 55,9 metros.

O Magnésio (Mg) ajustou dois modelos de semivariogramas, sendo que para o nível  $\geq 1$  cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup> ajustou o modelo exponencial e para o nível  $\leq 1,15$  cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup> o modelo Gaussiano e os IDEs foram moderado(0,72) e forte (0,81) e os Alcances 31,8 e 75,4 metros, respectivamente.

O pH com intervalo de suficiência de 5,2 a 5,6 ajustou dois modelos, o exponencial e o esférico com IDEs forte (0,89) e moderado (0,5) e alcances 51,3 e 87,8, respectivamente.

A Saturação por Base(V) no intervalo[ 28, 42]% ajustou os modelos exponencial (para o nível  $\geq 28\%$  e para o nível  $\leq 42\%$ ) ambos com IDE forte de 0,89 e 0,92 e alcances 58,0 e 45 metros, respectivamente.

O Alumínio com nível  $\leq 0,08$  cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup> ajustou o modelo exponencial com IDE forte de 0,90 e Alcance de 51 metros e para Saturação por Alumínio (Sat./Al) no nível  $\leq 25\%$  não houve dependência espacial e por isso, para gerar o mapa de interpolação utilizou o método do inverso do quadrado da distância, análogo ao procedimento utilizado por Machado et al., 2007.

Para alguns elementos, ao utilizar para análise a indicação constante da Tabela 1 (Seção 3.2) detectou que toda a área analisada apresentava-se abaixo do nível mínimo ou acima do nível máximo de suficiência ideal e por isso foi necessário elaborar dois semivariogramas (ver Quadro 1(Anexo 1). Estes semivariogramas compreenderam o intervalo de suficiência para o cultivo de café, porque um semivariograma único para os limites inferior e superior do intervalo de suficiência não detectaram a dependência espacial.

Após aplicar operação de intersecção nos mapas de probabilidades utilizando probabilidade de 0,6; 0,7 e 0,8 percebeu que os mapas gerados por Krigagem Indicativa para os casos onde foi necessário dois semivariogramas para uma mesma variável, apresentavam a maioria das áreas com deficiência ou desequilíbrio do nutriente, como foi o caso do nível de Fósforo (P)  $\leq 2,7$  mg/dm<sup>3</sup> em que apresentou uma pequena região com probabilidade igual ou acima de 80% localizada no canto superior direito do mapa (Figura  $a_2$  da Seção 4.1.1.), enquanto que para o nível  $\geq 1,2$ mg/dm<sup>3</sup> (Figura  $a_1$  da Seção 4.1.1.) a maioria da área apresentava-se com esta probabilidade porém, na região contrária ao nível  $<2,7$ mg/dm<sup>3</sup>, isto está mostrado no mapa do intercepto dos dois mapas supra citados e verifica-se que o nutriente que encontra-se dentro do intervalo de suficiência apresenta apenas numa pequena mancha verde no canto superior direito, indicando que o mesmo está em desequilíbrio. O controle o Fósforo (P) é necessário levando em consideração as afirmações de pesquisadores como Pezzopane et al. (2007); Miguel et al. (1995) e Matiello et al. (1991; 2005) que

consideram o balanço de nutrientes P, K, Ca e Mg tão importante quanto as quantidades destes nutrientes no solo, uma vez que, ao elevar um pode-se provocar a ausência do outro e deste modo, o excesso de P em alguns locais da área pode provocar algum dano nas plantas localizadas nestes lugares e nas proximidades.

Pode se verificar nos mapas que os níveis de saturação por Base (V) encontram-se desbalanceados e (ver Figuras  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  representados no Quadro 1 (Seção 4.1.1.)). Observe que na Figura  $g_1$  para o nível mínimo de 28% o mapa possui pequenas áreas em que apresentam probabilidades iguais ou superiores a 0,8 ao nível de suficiência e estas subáreas não correspondem às subáreas apresentadas no mapa da Figura  $g_2$  para nível de suficiência máximo de 42%, deste modo o mapa  $g_3$  que representa a intersecção dos dois mapas( $g_1$  e  $g_2$ ) com probabilidade de suficiência igual ou superior a 0,8, apresenta poucas subáreas com pequenas dimensões onde os níveis de V são compatíveis ao cultivo de café.

Outro resultado observado são os mapas do Alumínio (Al) que apresenta-se fora do nível de suficiência ( $\leq 0,08$  cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>), mas ainda assim não apresenta risco a planta pelo fato do café ser uma das plantas mais resistentes ao Al e na análise dos níveis de suficiência para a Saturação por Alumínio (Sat. Al) esta apresentar-se com níveis de suficiência adequados em quase toda a área ( $\leq 30\%$ ). Este fato aponta para a inexistência do risco de toxicidade à planta em quase toda a área. Vale ressaltar que o alumínio ajustou no modelo de semivariograma “pepita puro” e o mapa foi gerado por meio do Inverso da Distância ao quadrado, seguindo procedimento similar a análise de solo feita por Machado et al. (2007).

O Potássio (K) apresentou insuficiente em quase totalidade da área, com apenas três subáreas pequena no centro e nas laterais apresentando suficiência com probabilidade superior a 60% e nas demais o solo apresenta carente do nutriente. Vale ressaltar que o K é o segundo nutriente exigido em maior quantidade, depois do N, para a cultura do cafeeiro. Ele é também, o primeiro quando se analisa a exportação de macronutrientes pela planta ( $K > N > Ca > Mg = S > P$ ). Isto está relacionado principalmente, a sua maior concentração nos frutos (MALAVOLTA, 1993 apud ALVES, 2012) e por esta razão é necessário a correção localizada do solo para este nutriente.

Para os macronutrientes Magnésio (Mg), Matéria Orgânica (M), Cálcio (Ca) e Potássio(K), quando não apresentaram dependência espacial no intervalo considerado suficiente, foi ajustado um modelo de semivariograma para cada nível de suficiência (para o limite inferior e o limite superior do intervalo) e destes foi feita a intersecção dos respectivos mapas por meio de álgebras de mapas.

Assim com o Fósforo (P), o pH (Figura a<sub>3</sub> e a<sub>4</sub> do Quadro 1 (Seção 4.1.2) utilizou a imagem raster gerada a partir dos mapas interpolados por Krigagem Indicativa para o nível de corte igual ou acima de 5,75 e para o nível de corte igual ou abaixo 6,0 (levando em consideração os mapas referente aos dois semivariogramas ) e admitindo-se probabilidades iguais ou superiores a 0.6 e 0.8, respectivamente.

O procedimento de plotar os mapas para os pontos de corte baseado nos limites inferior e superior de suficiência favoreceu na elaboração do mapa final porque em muitos casos a uma distribuição apresentou-se com valores clusterizados em pontos distintos na área e isto impossibilitou o ajuste do semivariograma a partir de um único ponto de corte. Ao utilizar dois pontos de cortes baseados nos limites inferior e superior do intervalo, os dois semivariogramas ajustaram mais facilmente ao modelo e a partir destes foram gerados os mapas para ambos os pontos de corte. O mapa da sobreposição dos dois mapas representou o resultado da Krigagem Indicativa dentro dos limites estabelecidos para os dois pontos de corte e determinou com o limite de probabilidade estabelecido , as subáreas com níveis de suficiência adequados para o nutriente analisado.

Além do uso de álgebra de mapas para uma mesma variável, foi utilizado o procedimento para a intersecção dos mapas de variáveis diferentes, dois a dois (Ver Figuras (a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>, a<sub>4</sub>, a<sub>5</sub>, a<sub>6</sub>, a<sub>7</sub> e a<sub>8</sub>) do Quadro 2 (Seção 4.1.1)) e três a três (Ver Figuras (b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>, b<sub>4</sub>, b<sub>5</sub>, b<sub>6</sub>, b<sub>7</sub> e b<sub>8</sub>) do Quadro 2 (Seção 4.1.1)) e com isto foi possível localizar as subáreas em que estes nutrientes encontravam-se fora dos níveis exigidos para a boa produtividade da planta e permitiu fazer o planejamento das subáreas necessitadas da correção do solo e com este procedimento, equilibrar as quantidades destes nutrientes disponíveis no solo.

Para finalizar a discussão dos resultados relacionadas ao cultivo de café, pode-se dizer que a área apresentou carência de Matéria Orgânica (MO), Cálcio (Ca) e Potássio (K),

enquanto que o Fósforo (P) e o Magnésio (Mg) foi encontrado abundantemente acima do nível máximo permitido para a cultura. Os mapas de probabilidade (Figuras b<sub>1</sub> a b<sub>4</sub>) do Quadro 1 (Seção 4.1.1.) com probabilidades superiores a 60% mostraram pequenos pontos dispersos na área com intervalos adequados destes elementos.

A correção do solo com a reposição de Ca é importante porque o Ca é absorvido como Ca<sup>2+</sup> e atua como elemento estrutural nas paredes celulares (MARTINEZ et al., 2007) e sua deficiência provoca inicialmente com a clorose nas folhas mais novas que caminha das margens para o centro das folhas e com o tempo as folhas tornam-se esbranquiçadas, com necrose levando a morte dos ramos e extremidades das raízes e tornando a planta mais sensível ao déficit hídrico (ANDRADE, 2001).

O Potássio (K) é o principal responsável pela exportação de macronutrientes para a planta, intimamente ligados a produtividade e sua deficiência provoca a redução do tamanho dos internódios, a dominância apical e redução dos mesmos. A deficiência do Potássio (K) pode ser identificada por clorose nas bordas das folhas velhas seguidas de necrose que pode progredir para as folhas mais novas e causando redução na produtividade (ANDRADE, 2001).

A importância do controle do nível de Magnésio (Mg) no solo é devido principalmente a sua absorção na forma de Mg<sup>2+</sup> que é um elemento central da clorofila, essencial na fotossíntese, importante no metabolismo de carboidratos e presente em quase todas as enzimas de fosforilação, além de ser essencial para manter a integridade estrutural dos ribossomos (MARTINEZ et al., 2007). A deficiência deste nutriente é observada pelo amarelecimento ou clorose entre as nervuras secundárias nas folhas mais velhas, tornando-se pardacenta e podendo progredir às folhas novas (MALAVOLTA, 1993).

De acordo com Garcia (1993) a disponibilidade de Ca e Mg no solo é essencial tanto quanto a sua relação. Assim, um solo com baixo teor de Ca e Mg pode promover melhor produção que um solo com alto teor destes nutrientes, porém desequilibrado, por isso é importante conhecer os teores de cada um destes nutrientes e equilibrá-los.

A carência de Matéria Orgânica (MO) (ALVES, 2012) no solo contribui negativamente para a perda de propriedades físicas e biológicas do solo, além de influenciar diretamente na

redução da fertilidade do solo por reduzir a disponibilidade de nutrientes como o Nitrogênio, o enxofre (S) e o Fósforo (P) e diminuindo a CTC, necessária à reserva e disponibilidade de bases importantes para a manutenção da produtividade como o Potássio (K), o Cálcio (Ca) e o Magnésio (Mg).

#### **4.2.2 Análise da eficiência do método de KI na modelagem de dados e apresentação de resposta a questão de pesquisa**

De acordo com a fundamentação matemática apresentada ao longo do trabalho ficou claro que a Krigagem Indicativa, sendo um Preditor Geoestatístico que utiliza o estimador de Krigagem Ordinária para prever valores no intervalo de 0 a 1 carga para sua estrutura toda a teoria matemática da Krigagem Ordinária que a faz um preditor ótimo, com a vantagem da simplicidade e unicidade de notação que é própria de Função Indicadora (MOOD; BRAYBILL; BOES, 1974), descrita na Seção (2.1.3) e isso a torna mais eficiente na modelagem de dados por permitir um tratamento probabilístico dos resultados obtidos.

Outro ponto positivo para a Krigagem Indicativa é que se comparada à Krigagem Ordinária ela é mais eficiente, pelo fato de, (contrário da Krigagem Ordinária que prevê valores para locais não amostrados), utilizar ponto de corte para prever probabilidade de ocorrência desses valores e com isso fornecer diretamente uma resposta probabilística para a questão analisada.

No estudo de variáveis de solo e no planejamento de manejo de consorciação de culturas a Krigagem Indicativa mostrou-se eficiente em todas as análises porque permitiu identificar as regiões carentes de cada nutriente e apontou, quando não houve número suficiente de 0 ou 1 para modelar o Semivariograma, que a variável analisada estava com o nível de fertilidade suficiente ou insuficiente, respectivamente, em toda a área.

A resposta precisa e simples fornecida pela Krigagem Indicativa por meio de mapa probabilístico contendo poucas cores favorece a interpretação e utilização pelo agricultor permitindo a tomada de decisão sobre o manejo mais indicado.

## 5. CONCLUSÃO

Com base em toda a teoria matemática que envolve a Krigagem Indicativa e as inúmeras possibilidades de aplicação de suas técnicas e contestando algumas afirmações apresentadas por alguns autores ao apontarem desvantagens na aplicação da Krigagem Indicativa, conclui-se que as desvantagens apontadas por estes autores não são inerentes a apenas a Krigagem Indicativa e sim a qualquer metodologia aplicada por pesquisadores sem o devido conhecimento de suas aplicações e limitações.

Por esse motivo a Krigagem Indicativa se mostrou uma técnica eficiente para resolução de problemas reais de planejamento e identificação de zonas de manejo, devido, principalmente a eficiência da Krigagem Indicativa em estabelecer indicadores para tomada de decisões, fator de peso para seu uso na agricultura. A simplicidade com que os mapas de Krigagem Indicativa apresenta os resultados exige pouco conhecimento de quem o utiliza e isso é favorável ao meio agrícola porque as pessoas envolvidas no trabalho são na maioria de baixa escolaridade com pouco conhecimento para interpretar mapas mais complexo. A grande vantagem da krigagem Indicativa é permitir a tomada de decisão baseada em informações sintetizadas por meio do nível de corte conhecido.

Uma desvantagem apresentada ao utilizar o método de interpolação por meio de Krigagem Indicativa é a dificuldade de ajustar o modelo utilizando apenas o método dos Mínimos Quadrados Ponderados (Constantes em quase todo *software*, como é o caso do arcGIS 10.0, do GS+, SPRING dentre outros) . Muitas vezes, para obter melhor ajuste para o conjunto de pontos amostrais faz necessário que sejam testados vários métodos de ajustamento e não apenas o método de mínimos quadrados ou mínimos quadrados ponderados. A falta de opção de método de ajustamento é uma limitação dos *softwares* existentes no mercado e deste modo, a atuação da Krigagem Indicativa fica, quando não ajusta bem ao Método dos Mínimos Quadrados, dependente de mudanças de pontos de corte para próximo do desejado e até mesmo do uso de dois mapas para uma mesma variável e aplicação de álgebra de mapas.

Para melhoria e prosseguimento da pesquisa nesta área sugere que se desenvolvam softwares que condensem as funções de Interpolação e álgebra de mapas em um só e permita

ao usuário escolher qual método de ajustamento dos pontos do Semivariograma é o mais adequado ao seu modelo.

Finalizando o trabalho conclui-se que a Krigagem Indicativa é eficiente para resolver problemas de mapeamento de áreas para manejo de rotação ou consorciação de culturas porque permite, dentre outras funcionalidades, classificar solos de acordo com as propriedades químicas, características de cada sub-região do campo, levando em consideração a variação espacial das propriedades em análises e fornece o mapa das probabilidades de cada ponto, podendo a partir disso tirar conclusões e tomar decisões.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, A. S.; BETTINI, C. **Curso de Geoestatística Aplicada**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1994.

ALVAREZ V. V. H. et al. Interpretação dos resultados das análises de solos. In: RIBEIRO, A. C.; GUIMARAES, P. T. G.; ALVAREZ V. V. H. (Ed.). **Recomendação para o uso de corretivos e fertilizantes em Minas Gerais**. Viçosa: Comissão de Fertilidade do Solo do Estado de Minas Gerais, 1999. p. 25-32.

ALVES, L. C. **Faixas de suficiência e níveis ótimos de atributos da fertilidade do solo para a cultura do café em Minas Gerais**. 2012. 66 f. Dissertação (Mestrado em Fitotecnia) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2012.

ANDRADE, C. E. **Calagem e Adubação do Café**. Viçosa: Aprenda Fácil, 2001. 130 p.

ANDRIOTTI, J. L. S. **Fundamentos de estatística e geoestatística**. São Leopoldo: UNISINOS, 2003. 165 p.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. 572 p.

BAGGIE, A. J. et al. Productivity of southern Brazilian coffee plantations shaded by different stockings of Goreville Robusta. **Agroforestry Systems**, Amsterdam, v. 37, n. 2, p. 111-120, 1997.

BARRADAS, V. L.; FANJUL, L. Microclimatic characterization of shaded and open – grow coffee (coffea arábica L.) plantations in Mexico. **Agricultural and Forest Meteorology**, v. 38, p. 101-112, 1986.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1980. 411p.

BRASIL. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. Secretaria de Política Agrícola, Instituto Interamericano de Cooperação para a Agricultura. **Cadeia produtiva de produtos orgânicos**. Brasília: IICA, 2007. 108p.

BURGESS, T. M.; WEBSTER, R. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. **Journal Soil Science**, v. 31, p. 315-331, 1980.

CÂMARA, G.; MEDEIROS, J. S. Princípios básicos em geoprocessamento. In: ASSAD, E. D.; SANO, E. E. **Sistemas de informações geográficas: aplicações na agricultura**. 2. ed. Brasília: Embrapa – SPI, 1998. p. 3-11.

CAMARGO, E. C. G. **Desenvolvimento, implementação e teste de procedimentos geoestatísticos (krigeagem) no sistema de processamento de informações georreferenciadas (SPRING)**. 1997. 124 f. Dissertação (Mestrado Sensoriamento Remoto) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1997.

CAMARGO, E. C. G.; FELGUEIRAS, C. A.; MONTEIRO, A. M. V. A importância da modelagem da anisotropia na distribuição espacial de variáveis ambientais utilizando procedimentos geoestatísticos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE SENSORIAMENTO REMOTO, 10, 2001, Foz do Iguaçu. **Anais X SBSR**, Foz do Iguaçu: INPE, 2001. p. 395-402.

CAMARGO, I.; BOULOS, P. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005. 543 p.

CAMBARDELLA, C. A. et al. Field scale variability of soil properties in Central Iowa soils. **Soil Science Society of American Journal**, v. 58, p. 1501-1511, 1994.

CARAMORI, P. H.; MANETTI FILHO, J. **Proteção dos cafeeiros contra geadas**. Londrina: IAPAR, 1993. 27 p.

CRESSIE, N. **Statistics for Spatial data**. New York: Wiley, 1993.

CURTIS, C. W. **Linear álgebra: An introductory approach**. Undergraduate texts in mathematics. Oregon: University of Oregon, 1996. 350 p.

DEUTSCH, C. V.; JOURNEL, A. G. **GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide**. New York: Oxford University Press, Oxford, 1992. 340 p.

DIGGLE, P. J.; RIBEIRO JUNIOR, P. J. **Model-based geostatistics**. New York: Springer, 2007. 228 p.

EMBRAPA - MANDIOCA E FRUTÍFERAS. **O cultivo da banana**. Cruz das Almas: Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimentos, 2004. 279 p.

EMBRAPA CERRADOS. Ministério da Agricultura, pecuária e abastecimento. **Aspectos relacionados ao manejo da adubação fosfatada em solos do cerrado**. Planaltina, 2007.

EMBRAPA- MEIO AMBIENTE. **Café consorciado**. Rede agroecologia, 2009.

EMBRAPA. Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. Centro Nacional de pesquisa de Solos. **Solos do Estado de Santa Catarina**. Rio de Janeiro: Embrapa Solos, 2004. 726p.

EMPRAPA. **Sistema brasileiro de classificação dos solos**. Rio de Janeiro: EMBRAPA /CNPS, 1999. 412 p.

EMBRAPA – SOJA. Sistema de produção nº1. Tecnologias de Produção de Soja Região Central do Brasil 2004. Disponível em: <<http://www.cnpso.embrapa.br/producaosoja/rotacao.htm>> Acesso em: 20 janeiro 2012.

ENVIRONMENTAL SYSTEMS RESEARCH INSTITUTE - ESRI. **ArcGis 10.0**. Redland: ESRI, 2010.

FAGIOLI, A. S.; ZIMBACK, C. R. L.; LANDIM, P. M. B. Classificação de Imagens em áreas cultivadas com citros por técnicas de Sensoriamento Remoto e Geoestatística. **Rev. Energ. Agric.**, Botucatu, v. 27, n. 3, p. 1-15, 2012.

FELGUEIRAS, C. A. **Modelagem ambiental com tratamento de incertezas em sistemas de informação geográfica: o paradigma geoestatístico por indicação**. 1999. 212 f. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1999.

FELGUEIRAS, C. A. Modelagem Numérica de Terreno. In: CÂMARA, G.; DAVIS, C. MONTEIRO, A. M. V. **Introdução à Ciência da Geoinformação**. São José dos Campos: INPE, 2001.

FERNANDES, D. R. Manejo do cafezal: In: RENA, A. B. et al. (Ed.). **Cultura do cafeeiro: fatores que afetam a produtividade**. Piracicaba: POTAFOS, 1986. p. 275-301.

GALVANIN, E. A. S. **Utilização de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) no Tratamento de Imagens Orbitais**. 2002. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, SP, 2002.

GAMMA DESIGN SOFTWARE. **GS+ 7.0: Geostatistics for the Environmental Sciences**. Michigan: Gamma Design Software, 2012.

GARCIA, A. W. R. Calagem para o cafeeiro. In: MALAVOLTA, E. **Nutrição Mineral e Adubação do Cafeeiro: Colheitas econômicas máximas**. São Paulo: Agronômica Ceres, 1993. p. 103-115.

GARCIA, A. W. R. Calagem para o cafeeiro. In: RAIJ, B. V.; BATAGLIA, O. C.; SILVA, N. M. **Acidez e calagem no Brasil**. Campinas: Sociedade Brasileira de Ciência do Solo, 1983. p. 309-319.

GENTIL, N. et al. **Matemática para o 2º Grau**. 2. ed. São Paulo: Àtica, 1998. 456 p.

GOOVAERTS, P. **Geostatistics for natural resources evaluation**. New York: Oxford University Press, 1997. 650 p.

GUEDES, L. P. C. et al. Anisotropia no estudo da variabilidade espacial de algumas variáveis químicas do solo. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, v. 32, n. 6, p. 2217-2226, 2008.

GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo: Um curso básico**. 5. ed. São Paulo: LTC, 2001.

GUIMARÃES, E. C. Geoestatística Básica e Aplicada. UFU/ FAMAT, 2004. Disponível em: <[www.famat.ufu.br/ednaldo/geoest/apgeo1.pdf](http://www.famat.ufu.br/ednaldo/geoest/apgeo1.pdf)>. Acesso em: 10 de ago. 2012.

HOLFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo**: Um curso Moderno e suas aplicações. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

IBGE. **Brasil Agrário Retratado pelo Censo Agropecuário 2006**. Censo Agropecuário Brasileiro: Brasil, grandes regiões e Unidades da Federação. 2007. 170 p.

IBGE. **Comentários**. Brasil agrário retratado pelo Censo Agropecuário 2006. Notas de esclarecimento. Censo 2007. 2012. 74 p.

IBGE. Censo Agropecuário 2006 Brasil, Grandes Regiões e Unidades da Federação. 2006. Disponível em: <[www.ibge.gov.br/home/estatistica/.../Brasil\\_censoagro2006.pdf](http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/.../Brasil_censoagro2006.pdf)>. Acesso em: 24 janeiro 2013.

IMAI, N. N. K. et al. SIG PARA A AGRICULTURA DE PRECISÃO. In: IV Fórum de Ciências da FCT, 2003, Presidente Prudente. **Anais do IV Fórum de Ciências da FCT**. Presidente Prudente: FCT. p. 190-198. CD-ROM.

ISAAKS, E. H.; SRIVASTAVA, R. M. **An Introduction to Applied Geostatistics**. New York: Oxford University Press, 1989. 560 p.

JACKSON, M. L. Aluminum bonding in soils: A unifying principle in soil science. **Proceedings Soil Science Society of America**, v. 27, n. 1, p. 1-9, 1963.

LAMDIM, P. M. B. **Análise estatística de dados geológicos multivariados**. São Paulo: Oficina de Textos, 2011. 208 p.

LAMPARELLI, R. A. C.; ROCHA, J. V.; BORGHI, E. **Geoprocessamento e agricultura de precisão**: fundamentos e aplicações. Guaíba: Agropecuária, 2001. 118 p.

LANDIM, P. M. B. **Análise estatística de dados geológicos**. 2. ed. São Paulo: UNESP, 2003.

LANDIM, P. M. B. Sobre Geoestatística e Mapas. *Terra Didática*, v. 2, n. 1 p.19-33, 2006. Disponível em: <<http://www.ige.unicamp.br/terraedidatica/>>. Acesso em: 12 dezembro 2012.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1990. 1178 p.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 324 p.

LORETO, A. C. C.; SILVA, A. A.; LORETO JUNIOR, A. P. A. **Álgebra Linear e suas aplicações**: Teoria e exercícios. 3. ed. LCTE, 2011. 188 p.

MACHADO, L. O. et al. Variabilidade espacial de atributos químicos do Solo em áreas sob sistema de plantio convencional. **R. Bras. Ci. Solo**, v. 31, p. 591-599, 2007.

- MALAVOLTA, E. Informação agronômica sobre nutrientes para as culturas. In: **NUTRIFATOS**. Piracicaba: POTAFOS, 1996. p. 1-24.
- MALAVOLTA, E. **Manual de Nutrição Mineral de Plantas**. São Paulo: Agronômica Ceres, 2006. 500 p.
- MALAVOLTA, E. **Nutrição Mineral e Adubação do Cafeeiro**: Colheitas econômicas máximas. São Paulo: Agronômica Ceres, 1993. 210 p.
- MARTINEZ, H. E. P.; TOMAZ, M. A.; KAKIYAMA, N. S.; **Guia de acompanhamento das aulas de cafeicultura**. 2 ed. Viçosa: Ed. UFV, 2007. 152 p.
- MATHERON, G. Principles of geostatistics. **Economic Geology**, v. 58, n. 8, p. 1246-1266, 1963.
- MATIELLO, J. B. et al. **Cultura de café no Brasil**: Novo Manual de Recomendações. Rio de Janeiro: Fundação PROCAFÉ, 2005. 438 p.
- MATIELLO, J. B. et al. Níveis de sombreamento em cafezal na região serrana de Pernambuco. Parte III. In: Congresso Brasileiro de Pesquisas Cafeeiras, 15., 1989, Rio de Janeiro. **Resumos**. Rio de Janeiro: IBC, 1989. p. 182.
- MATIELLO, J. B. **O Café**: do cultivo ao consumo. São Paulo: Globo, 1991. 320 p.
- MENDES, A. M. S.; BASSOI, L. H.; SILVA, D. J. Uso da Krigagem Indicativa como Ferramenta para Manejo da Adubação na viticultura irrigada. In: XXXIII Congresso Brasileiro De Ciências Do Solo. Solo nos biomas brasileiros: Sustentabilidade e mudanças climáticas, 2012, Uberlândia. **Anais do XXXIII Congresso Brasileiro De Ciências Do Solo**. Uberlândia, 2012.
- MENDES, A. M. S.; FONTES, R. L. F.; OLIVEIRA, M. Variabilidade espacial da textura de dois solos do Deserto Salino, no Estado do Rio Grande do Norte. **Ciência Agrônômica**, Fortaleza, v. 39, n. 1, p. 19-27, 2008.
- MIGUEL, A. E. et al. Efeitos da arborização do cafezal com *Grevillea robusta* nas temperaturas do ar e umidade do solo, Parte II. In: Congresso Brasileiro de Pesquisas Cafeeiras, 21, 1995. **Resumos**. Rio de Janeiro: PROCAFE, 1995. p. 55-60.
- MONTEZANO, E. M.; PEIL, R. M. N. Sistemas de consórcio na produção de hortaliças. **Revista Brasileira de agrociência**, v. 12, n. 2, p. 129 - 132, 2006.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the Theory of Statistics**. McGraw-Hill, 1974. 577 p.
- MORRISON, J. E.; CHICHESTER, F.W. Tillage sistem effects on soil and plant nutrient distribution on vertisols. **Journal of production in agriculture**, v. 7, n. 3, p. 364-375, 1994.

MULLA, D. J. et al. A comparasion of winter wheat yield and quality under uniform versus spatially variable fertilizer management. **Agriculture Ecosystems and Environment**, v. 38, p. 301-311, 1992.

PEZZOPANE, J. R. M.; JUNIOR, M. J. P.; GALLO, P. B. Caracterização microclimática em cultivo consorciado café/banana. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 11, n. 3, p. 256–264, 2007.

PRIMAVESI, A. **Manejo ecológico do solo: a agricultura em regiões tropicais**. São Paulo: Nobel, 1999. 533 p.

RENCHER, C. A; SCHAALJE, G. B. **Linear Models In Statistics**. 2 ed. Library of Congress Cataloging, 1934.

ROCHA, A. C. B. **A Geoestatística Aplicada à Avaliação e Caracterização de Reservatórios Petrolíferos**. 2005. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2005.

RODRIGUES, M. L. **Modelos de Retoque Digital Utilizando Equações Diferenciais Parciais**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2006.

ROMEIRO, A. R. Agricultura e ecodesenvolvimento. In: ROMEIRO, A. R. **Ecologia e Desenvolvimento**. Rio de Janeiro: Aped, 1992. p. 207-330.

SALVIANO, A. A. C. **Variabilidade de atributos de solo e de Crotalaria juncea em solo degradado do município de Piracicaba-SP**. 1996. 91 f. Tese (Doutorado) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

SANTOS, G. R. **Hierarquização geométrica dos preditores geoestatísticos**. 2010. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.

SHILOV, G. E. **Linear algebra**. Moscow: Dover, 1977. 387 p.

SILVA, A. F. et al. Aplicação da Geoestatística em Ciências Agrárias. In: 2º SIMPÓSIO DE GEOESTATÍSTICA APLICADA EM CIÊNCIAS AGRÁRIAS, 2011. **Anais do 2º Simpósio De Geoestatística Aplicada Em Ciências Agrárias**. Botucatu: GEPAG - UNESP, 2011.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. 829 p.

SOUZA, E. et al. Mapeamento da probabilidade de ocorrência de classes da sorvidade e da condutividade hidráulica saturada de um Neossolo Flúvico. **Revista Brasileira de Ciências Agrárias**, v. 3, n. 2, p. 164-172, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. 5 ed. Thomsom Pioneira, 2002.

TRANGMAR, B. B.; YOST, R. S.; UEHARA, G. Application of geostatistics to spatial studies of soil properties. **Advances in Agronomy**, v. 38, p. 45-94, 1985.

TSCHIEDEL, M.; FERREIRA, M. F. Introdução à agricultura de precisão: conceitos e vantagens. **Ciência Rural**, v. 32, n. 1, p. 159-163, 2002.

VAAST, P. et al. Shade: a key factor for coffee sustainability and quality. In: ASIC CONFERENCE, 20., 2004, **Bangalore. Proceedings**. Bangalore: ASIC, 2004. CD ROM.

VALENTE, S. M. et al. Definition of management zones in coffee production fields based on apparent soil. **Scientia Agricola**, v. 69, n. 3, p. 173-179, 2012.

VALERIANO, M. M. Dados topográficos. In: FLORENZANO, T. G. **Geomorfologia: conceitos e tecnologias atuais**. São Paulo: Oficina de Textos, 2008. p. 72-104.

VALERIANO, M. M. Modelo digital de elevação com dados SRTM disponíveis para a América do Sul. São José dos Campos, SP: INPE (INPE-10550-RPQ/756). 72 p. 2004.

VALERIANO, M. M.; ABDON, M. M. Aplicação de dados SRTM a estudos do Pantanal. **Revista Brasileira de Cartografia**, v. 59, p. 63-71, 2007.

VALERIANO, M. M.; PICINI, A. G.; MELLO, M. H. A. Estratificação de efeitos anisotrópicos do relevo na geração de mapas pluviométricos por geoprocessamento. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Santa Maria, v. 10, n. 1, p. 167- 177, 2002.

VALERIANO, M. M.; PRADO, H. Técnicas de geoprocessamento e de amostragem para o mapeamento de atributos anisotrópicos do solo. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Viçosa, v. 25, n. 3, p. 997-1005, 2001.

VICENTE, J. **Estudo comparativo de métodos geoestatísticos aplicados em agricultura de precisão**. 2004. 163f. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas) – Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2004.

VICENTE, J. et al. Estudo comparativo entre krigagem linear e krigagem não linear para aplicação em Agricultura de Precisão. In: III COLÓQUIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS, 2003, Curitiba. **Anais do III Colóquio Brasileiro De Ciências Geodésicas**. Curitiba, 2003. CD-ROM.

VIEIRA, C. **O feijão em cultivos consorciados**. Viçosa: UFV, 1985. 134 p.

VIEIRA, S. R. Geoestatística em estudos de variabilidade espacial do solo. In: NOVAIS, R. F.; ALVARES, V. H.; SCHAEFER, C. E. G. R. **Tópicos em ciência do solo**. Viçosa: Sociedade Brasileira de Ciência do Solo, 2000. p.1-54.

WEBSTER, R.; OLIVER, M. A. **Geostatistics for environmental scientists**. 2 ed. Wiley, 2007. 330 p.

YAMAMOTO, J. K; LANDIM, P. M. B. **Geoestatística: Conceitos e aplicações.** São Paulo: Oficina de textos, 2013. 215 p.

ZIMBACK, C. R. L. **Análise espacial de atributos químicos de solos para fins de mapeamento da fertilidade.** 2001. 114 f. Tese (Livre-Docência em Levantamento do Solo e Fotopedologia) - Faculdade de Ciências Agrônômicas da Universidade Estadual Paulista, Botucatu, 2001.

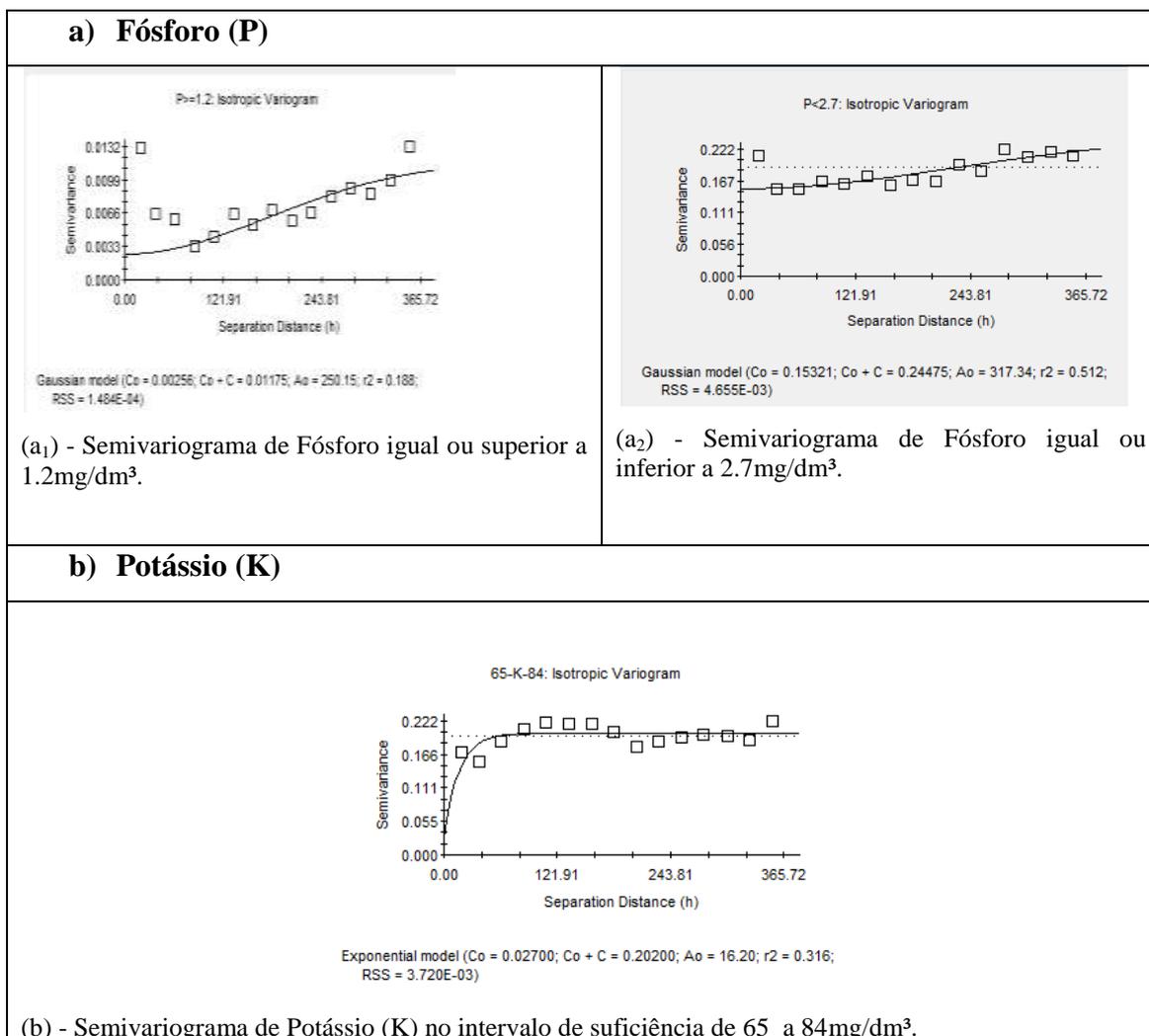
## ANEXOS

A seguir estão representados os semivariogramas ajustados para as variáveis Fósforo (P), Potássio (K), Matéria Orgânica (MO), Cálcio (Ca), Magnésio (Mg), Alumínio (Al), Saturação por Alumínio (Sat/Al), Acidez/Alcalinidade (pH), Saturação por Base (V) e Zinco (Zn) de acordo com os pontos de cortes respectivos a cada cultura, a saber: Café (Quadro 1) e Bananeira (Quadro 2).

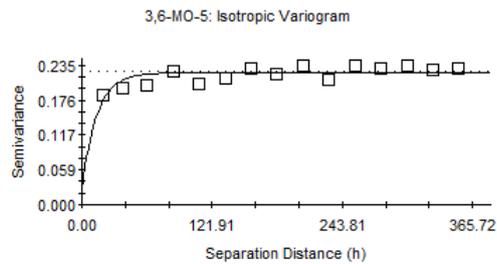
### ANEXO I

#### Semivariogramas das variáveis analisadas com pontos de corte relativos ao cultivo de café.

Quadro Anexo I - Figuras dos Semivariogramas ajustados para as variáveis relativas ao cultivo de café de acordo com os pontos de corte constantes na Tabela 1 da Seção 3.2.



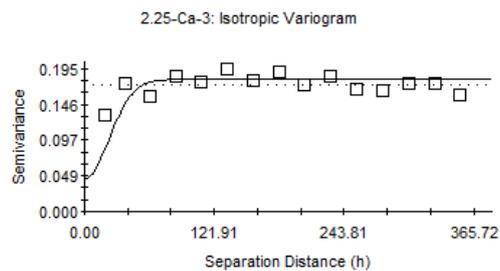
**c) Matéria Orgânica (MO)**



Exponential model ( $C_0 = 0.02400$ ;  $C_0 + C = 0.22300$ ;  $A_0 = 13.90$ ;  $r^2 = 0.504$ ;  
RSS =  $1.771E-03$ )

(c) - Semivariograma de Matéria Orgânica (MO) no intervalo de suficiência de 3,6 a 5,0 dag/dm<sup>3</sup>.

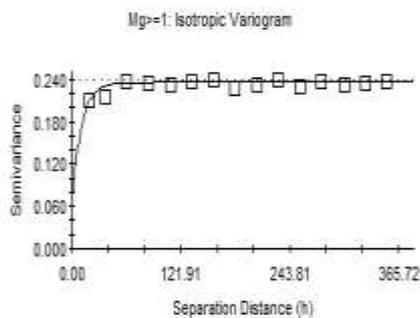
**d) Cálcio (Ca)**



Gaussian model ( $C_0 = 0.04442$ ;  $C_0 + C = 0.18043$ ;  $A_0 = 32.29$ ;  $r^2 = 0.485$ ;  
RSS =  $4.599E-03$ )

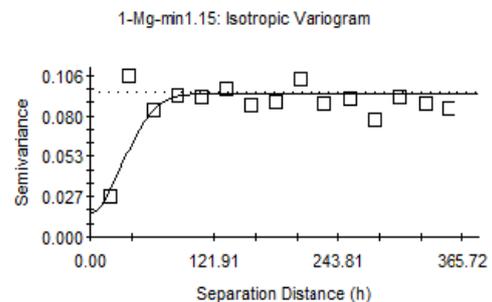
(d) - Semivariograma de Cálcio (Ca) no intervalo de 2,25 a 3 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>.

**e) Magnésio (Mg)**



Exponential model ( $C_0 = 0.06560$ ;  $C_0 + C = 0.23657$ ;  $A_0 = 10.60$ ;  $r^2 = 0.642$ ;  
RSS =  $4.237E-04$ )

e<sub>1</sub>) Semivariograma de Magnésio (Mg) para valores igual ou superiores a 1,0 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>.

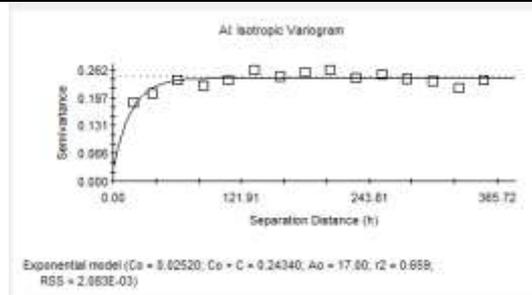


Gaussian model ( $C_0 = 0.01591$ ;  $C_0 + C = 0.09415$ ;  $A_0 = 43.55$ ;  $r^2 = 0.455$ ;  
RSS =  $3.040E-03$ )

e<sub>2</sub>) Semivariograma de Magnésio (Mg) no intervalo de suficiência de 1,0 a 1.15 cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>.

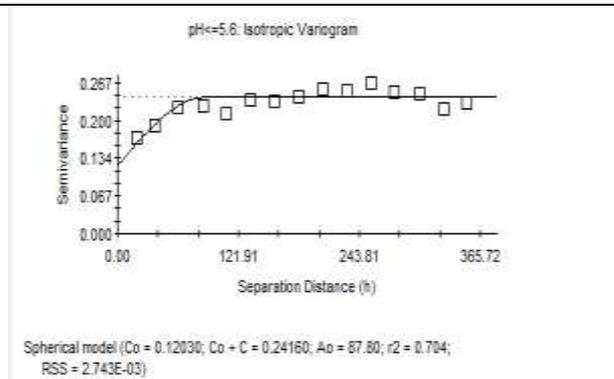
Continuação

**f) Alumínio (Al)**

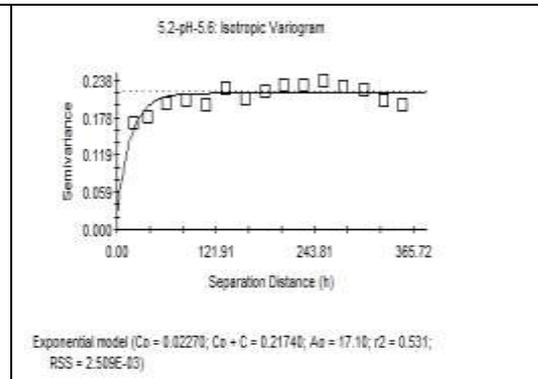


f) Semivariograma de Alumínio (Al) para valores inferiores a 0.08cmol<sub>c</sub>/dm<sup>3</sup>.

**(f) Acidez/ Alcalinidade (pH)**

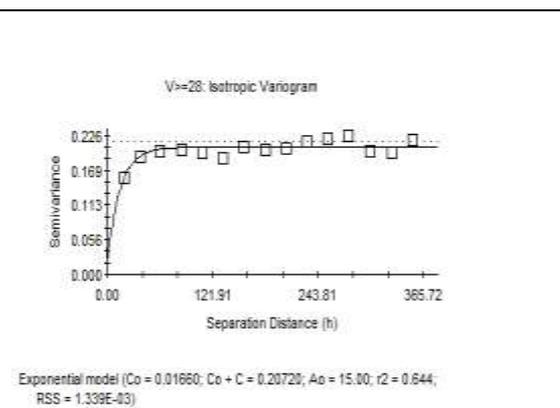


(h<sub>1</sub>) - Semivariograma de pH para valores iguais ou inferiores a 5.6.

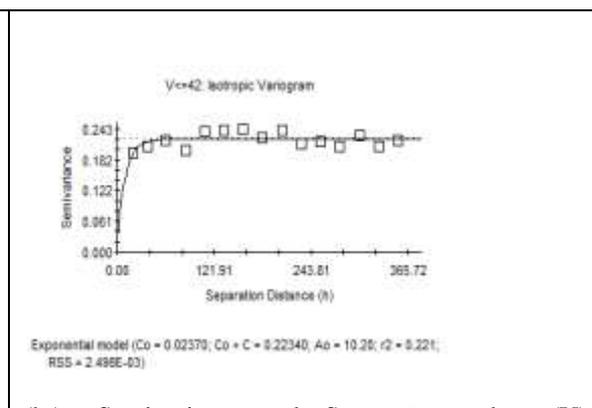


(h<sub>1</sub>) - Semivariograma de pH para o intervalo de suficiência de 5,6 a 6.0.

**(g) Saturação por base (V)**

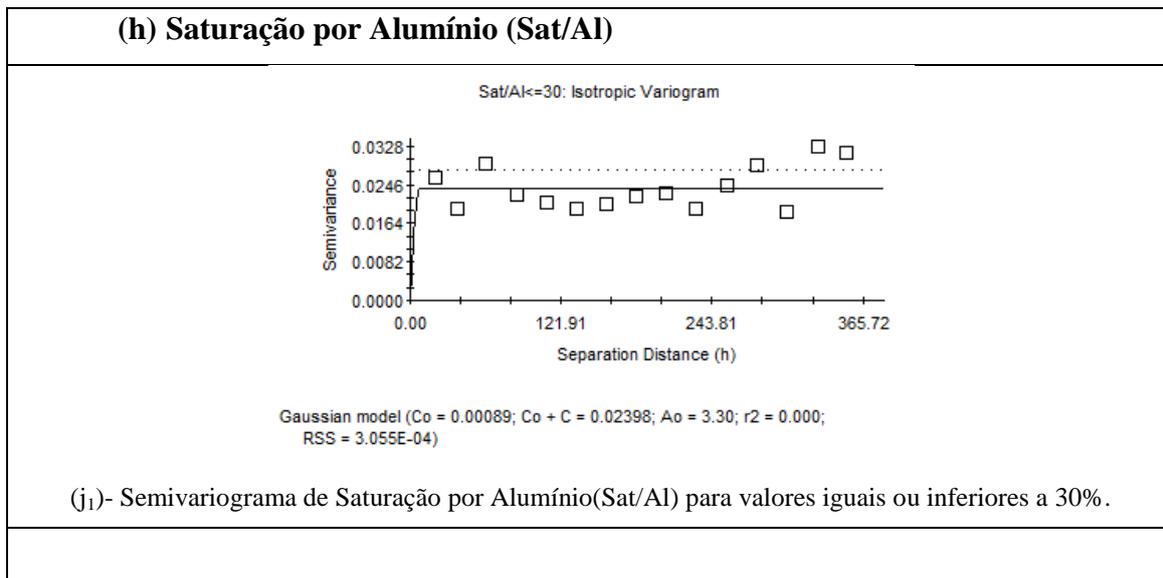


(h<sub>1</sub>) - Semivariograma de Saturação por base (V) para valores iguais ou superiores a 28 dag/kg



(h<sub>2</sub>) - Semivariograma de Saturação por base (V) para valores igual ou inferiores a 42 dag/kg.

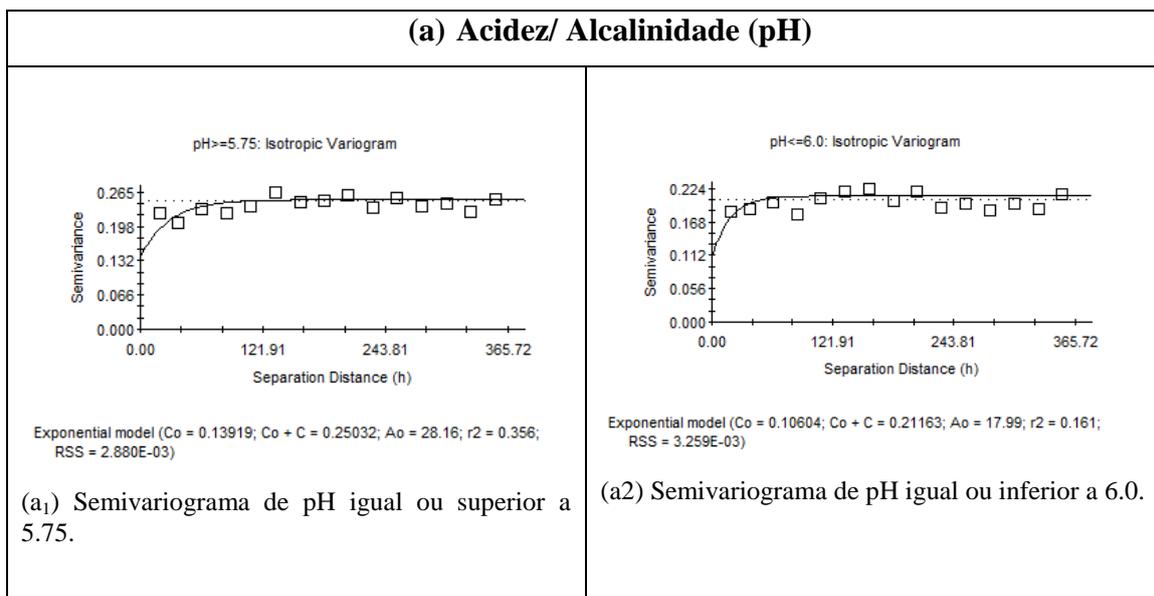
Continuação



## Anexo 2

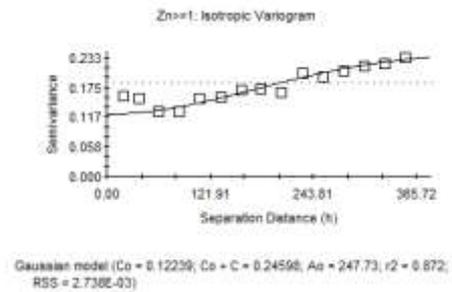
### Semivariogramas das variáveis analisadas com pontos de corte relativos ao cultivo de bananeira.

Quadro 2- Figuras dos Semivariogramas ajustados para as variáveis relativas ao cultivo de bananeira de acordo com os pontos de corte constantes na Tabela 3 da Seção 3.2.



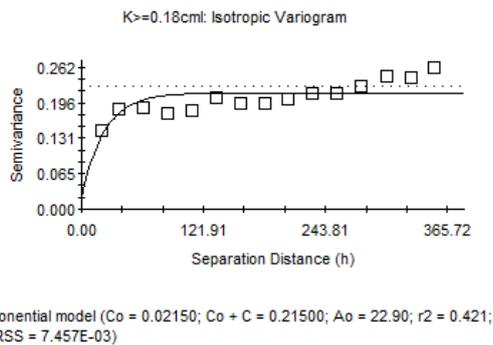
Continuação

**(b) Zinco (Zn)**

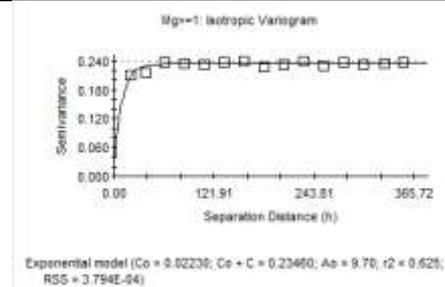


(b) Semivariograma do elemento Zinco (Zn) para o nível de suficiência de  $Zn \geq 1 \text{ mg/dm}^3$ .

**c) Potássio (K)**



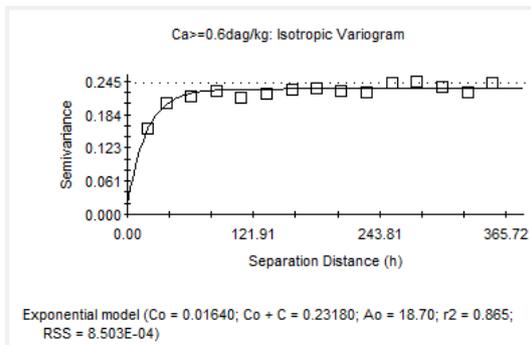
(c) Semivariograma do elemento Potássio (K) para o nível de suficiência de  $K \geq 18 \text{ cmol/dm}^3$ .



(d) Semivariograma do elemento Magnésio (Mg) para o nível de suficiência de  $Mg \geq 1 \text{ cmol/dm}^3$ .

Continuação

**e) Cálcio (Ca)**



(e) Semivariograma do elemento Cálcio (Ca) para o nível de suficiência de  $Ca \geq 0,6dag/kg$ .